



В. Д. СТАШУК, А.В. БУЛАШЕНКО

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

Навчальний посібник

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент Вишневий Сергій Валерійович, к-т техн. наук, ст. викл.

За редакцією укладачів

Гриф надано Методичною радою КПП ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 28.11.2019 р.) за поданням Вченої ради радіотехнічного факультету (протокол № 11/2019 від 25.11.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

*Сташук Вадим Данилович, к.т.н., доцент
Булашенко Андрій Васильович, ст.. викладач*

Основи теорії та комп'ютерне моделювання електронних кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / В. Д. Сташук, А.В. Булашенко; КПП ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл 6.58 Мбайт). – Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 400с.

Посібник містить теоретичний матеріал та приклади розв'язання задач з дисциплін «Основи теорії кіл», «Процеси в лінійних електронних схемах». Наведено чинні приклади, що ілюструють реальні ситуації інженерної творчості у галузі радіоелектроніки. Вивчення теоретичного матеріалу супроводжується моделюванням у комп'ютерній віртуальній лабораторії. Добір та виклад матеріалу ставлять за мету досягнення розуміння складних фізичних процесів у радіоелектронних колах

Посібник буде корисний студентам, викладачам та всім тим, хто мають на меті засвоїти теоретичний та практичний матеріал із вказаних курсів.

© В. Д. Сташук, А.В. Булашенко 2019
© КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019.

Зміст

ПЕРЕДМОВА	8
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ	10
РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ.....	14
1.1. Загальні відомості.....	14
1.2. Електронні кола та основні величини, що їх описують	17
1.2.1. Електронне коло як фізична система.....	17
1.1.2. Струм, напруга, потужність та енергія.....	20
1.3. Елементи електронних схем	22
1.3.1. Елемент опору.....	22
1.3.2. Елемент ємності.....	23
1.3.3. Елемент індуктивності.....	24
1.3.4. Взаємна індуктивність.....	25
1.3.5. Активні елементи схем.....	25
1.3.6. Схемні елементи реальних кіл	26
1.4. Фізичні закони електронних кіл	28
1.4.1. Закони Кірхгофа.....	28
1.4.2. Принцип дуальності.....	32
1.5. Класифікація і основні властивості електронних кіл.....	33
1.5.1. Лінійні та нелінійні кола	33
1.5.2. Інерційні і неінерційні кола.....	34
1.5.3. Кола із зосередженими та розподіленими параметрами	34
1.5.4. Кола стаціонарні та параметричні.....	35
1.5.5. Ідеалізації в теорії кіл.....	35
1.6. Комп'ютерне моделювання електронних кіл.....	36
1.6.1. Схемні елементи.....	36
1.6.2. Фізичні закони електричних кіл.....	40
1.6.3. Фізичні властивості електричних кіл	44
1.7. Підсумки та самоконтроль	49
РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ	51
2.1. Схеми заміщення та рівняння лінійних електронних кіл	51
2.1.1. Повна система рівнянь електронної схеми.....	51
2.1.2. Еквівалентні перетворення електронних схем	55
2.1.3. Теорема про еквівалентний генератор.....	61
2.2. Методи складання рівнянь електричних схем.....	64
2.2.1. Топологія електричних схем та закони Кірхгофа.....	64
2.2.2. Метод контурних струмів.....	67

2.2.3. Метод вузлових напруг	70
2.3. Розв'язання рівнянь електричних схем	74
2.3.1. Алгебраїчний метод розв'язання рівнянь	74
2.3.2. Схемні функції	76
2.4. Комп'ютерне моделювання	78
2.4.1. Еквівалентні перетворення електричних схем	78
2.4.2. Дослідження лінійних електричних кіл у режимі постійних струмів	87
2.4.3. Дослідження енергетичних процесів в електричних колах у режимі постійних струмів	90
РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНІ КОЛА ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ	91
3.1. Математичні моделі і параметри гармонічних коливань	91
3.1.1. Параметри гармонічних коливань	91
3.1.2. Векторні зображення гармонічних коливань	94
3.1.3. Комплексні амплітуди гармонічних коливань	95
3.2. Метод комплексних амплітуд	98
3.2.1. Комплексні опори, провідності, потужності	98
3.2.2. Схемні елементи в режимі гармонічних коливань	101
3.2.3. Закони Кірхгофа та Ома в комплексній формі	107
3.2.4. Добротності реактивних компонентів	108
3.2.5. Узгодження навантаження в режимі гармонічних коливань	111
3.3. Кола зі взаємними індуктивностями	113
3.3.1. Варіометр	113
3.3.2. Ідеальний і реальний трансформатори	114
3.4. Комп'ютерне моделювання	117
3.4.1. Амплітудно-фазові співвідношення в режимі гармонічних коливань	117
3.4.2. Енергетичні процеси в режимі гармонічних коливань	123
3.4.3. Магнітозв'язані кола	125
3.5. Підсумки і самоконтроль	129
РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ КОЛА В РЕЖИМІ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ	131
4.1. Математичні моделі періодичних коливань	131
4.2. Частотні характеристики. Електричні фільтри	137
4.3. Частотні характеристики резонансних кіл	143
4.3.1. Резонансні контури	143
4.3.2. Зв'язані резонансні контури	157
4.4. Частотний метод аналізу лінійних кіл у режимі періодичних коливань	162
4.5. Комп'ютерне моделювання	164
4.5.1. Спектральний аналіз	164
4.5.2. Частотні характеристики	169
4.5.3. Резонансні кола	172

4.5.4. Спектральний метод	179
4.6. Підсумки і самоконтроль	181
РОЗДІЛ 5. ПРОХІДНІ ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ	184
5.1. Рівняння і параметри чотириполосників	184
5.2. Схемні функції чотириполосників	190
5.3. Схеми з'єднань чотириполосників	193
5.4. Умови оберненості та симетрії чотириполосників	195
5.5. Еквівалентність і схеми заміщення чотириполосників	196
5.6. Комп'ютерне моделювання	197
5.7. Підсумки і самоконтроль	200
РОЗДІЛ 6. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ	201
6.1. Закони комутації	201
6.2. Схеми заміщення та рівняння лінійних інерційних кіл	203
6.3. Вільні, примушені та перехідні процеси в електричних колах	205
6.4. Математичні моделі неперіодичних коливань	219
6.4.1. Часові моделі та спектри неперіодичних коливань	219
6.4.2. Операторні зображення сигналів	225
6.5. Частотний метод аналізу	227
6.6. Операторний метод аналізу лінійних кіл	230
6.7. Аналіз лінійних кіл методом інтегралів згортки	242
6.7.1. Часові характеристики та операторні схемні функції	242
6.7.2. Метод інтегралів згортки	245
6.8. Комп'ютерне моделювання	251
6.8.1. Процеси в лінійних інерційних колах	251
6.8.2. Якісний аналіз процесів у лінійних інерційних колах	254
6.8.3. Інтегрувальні та диференціальні кола	255
6.8.4. Проходження імпульсних коливань у лінійних колах	257
6.8.5. Часові характеристики	261
6.9. Стійкість електричних кіл	264
6.10. Підсумки і самоконтроль	265
РОЗДІЛ 7. КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	268
7.1. Рівняння і параметри довгих ліній	268
7.1.1. Телеграфні рівняння та їх розв'язання	268
7.1.2. Хвильовий опір, коефіцієнт поширення хвилі, фазова швидкість	270
7.1.3. Погонні параметри лінії	271
7.2. Хвильові процеси у довгих лініях	273
7.2.1. Довга лінія без втрат. Режим біжних хвиль	273
7.2.2. Режим стійних хвиль	274
7.2.3. Режим змішаних хвиль	278

7.2.4. Коефіцієнт відбиття. Коефіцієнти біжної та стійкої хвилі	279
7.3. Застосування довгих ліній у радіоелектроніці	282
7.3.1. Довга лінія як фідер.....	282
7.3.2. Узгодження навантаження з лінією.....	283
7.3.3. Застосування відрізків довгих ліній	285
7.4. Комп'ютерне моделювання	289
7.4.1. Настроювання і вимірювання параметрів довгих ліній	289
7.4.2. Режими хвиль у довгих лініях.....	291
7.4.3. Частотні характеристики довгих ліній.....	293
7.5. Підсумки і самоконтроль.....	294
РОЗДІЛ 8. НЕЛІНІЙНІ КОЛА	296
8.1. Рівняння, параметри та характеристики нелінійних кіл.....	296
8.1.1. Параметри і характеристики нелінійних компонентів.....	296
8.1.2. Рівняння нелінійних схем.....	302
8.1.3. Характеристики і параметри нелінійних багатополосних елементів.....	305
8.2. Електричні кола в режимі постійних струмів.....	310
8.3. Електричні кола в малосигнальному режимі.....	319
8.3.1. Параметри лінійних багатополосних елементів.....	319
8.3.2. Схеми з багатополосними елементами в малосигнальному режимі	323
8.4. Перетворення форми і спектра сигналів у нелінійних колах	331
8.5. Методи аналізу нелінійних інерційних кіл	336
8.5.1. Числові методи	336
8.5.2. Квазілінійний метод.....	337
8.5.3. Метод повільно змінних амплітуд.....	340
8.6. Параметричні кола	343
8.6.1. Рівняння і властивості параметричних кіл.....	343
8.6.2. Процеси в параметричних колах	346
8.7. Порівняльна характеристика електричних кіл	350
8.8. Комп'ютерне моделювання	351
8.8.1. Параметри і характеристики нелінійних елементів.....	351
8.8.2. Характеристики і параметри біполярних транзисторів	354
8.8.3. Характеристики і параметри польових транзисторів	360
8.8.4. Електричні кола в режимі постійних струмів.....	365
8.8.5. Електричні кола у малосигнальному режимі	368
8.8.6. Перетворення форми і спектра сигналів у нелінійних колах.....	372
8.8.8. Параметричні кола	377
8.9. Підсумки і самоконтроль.....	379

ПРОГРАМА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ І РАДІОЕЛЕКТРОННИХ КІЛ <i>ELECTRONICS WORKBENCH</i>	382
---	-----

Д.1. Загальна характеристика	382
Д.2. Моделювання схем	383
Д.2.1. Вибір компонентів із бібліотек і робота з ними.....	383
Д.2.2. З'єднання елементів у схемі	383
Д.2.3. Установка значень параметрів елементів	384
Д.3. Опис програми <i>ELECTRONICS WORKBENCH</i>	385
Д.3.1. Система меню. Основні команди.	386
Д.3.2. Короткий опис елементної бази EWB 5.12.....	390
Д.4. Вимірювальні прилади програми <i>ELECTRONICS WORKBENCH</i>	395
Д.4.1. Вольтметр, амперметр, мультиметр	395
Д.4.2. Генератор стандартних сигналів і осцилограф	396
Д.4.3. Вимірювач частотних характеристик	398
Д.5. Завдання і вправи.....	399
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	400

ПЕРЕДМОВА

Посібник написано за багаторічним досвідом викладання у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» і Відкритому міжнародному університеті розвитку людини «Україна». Добір матеріалу, його компонування і виклад підпорядковані сучасному уявленню щодо ролі розробників, конструкторів і виробників у створенні радіоелектронної апаратури. Зокрема, роль конструктора полягає у матеріалізації технічних завдань, схем, розрахунків тощо. Оскільки в радіоелектронній апаратурі відбуваються складні електромагнітні, теплові, механічні, фізичні процеси, для успішного конструювання потрібно добре уявляти ці процеси, розуміти їх вплив на правильне функціонування апаратури. Фахівець також мусить знати принципи дії різноманітних радіоелектронних пристроїв, що необхідно для його грамотного спілкування з іншими спеціалістами у процесі розроблення, конструювання та виробництва згаданої апаратури.

Змістом посібника є систематичний виклад окремих розділів основ теорії кіл. Названа теорія висвітлює процеси в електричних колах, властивості радіоелектронних кіл з погляду їх можливих технічних застосувань для оброблення сигналів у різноманітних пристроях, питання розробки математичних моделей кіл, що дає змогу встановлювати кількісні співвідношення між фізичними величинами у цих процесах, а також виконувати технічні розрахунки. Отже, теорія кіл є основою глибокого розуміння електромагнітних процесів у радіоелектронній апаратурі.

Виклад матеріалу супроводжується прикладами, які демонструють застосування теорії до розв'язання практичних інженерних завдань. Розбір цих прикладів допоможе читачеві глибше зрозуміти електромагнітні процеси у колах і творчо засвоїти теорію електромагнітних кіл.

Вивчення теоретичних технічних дисциплін має завершуватись експериментальними дослідженнями конкретних технічних пристроїв на макетах у лабораторних умовах. Проте сучасний стан комп'ютерної техніки дає чудову можливість швидко та наглядно моделювати кола на комп'ютері.

У посібнику до кожного розділу вміщено рубрику «Комп'ютерне моделювання» (КМ), що в сукупності утворює віртуальну комп'ютерну лабораторію, де наведені завдання до комп'ютерного моделювання відповідно до викладеного теоретичного матеріалу, а також методика його виконання.

Відомо багато систем схемотехнічного моделювання. Це системи моделювання аналогово-цифрових пристроїв PSpice; системи моделювання аналого-

вих, цифрових і змішаних — аналогово-цифрових схем нелін (EWB) та MicroCAP. У цій книзі для комп'ютерного моделювання обрано програму Electronics Workbench як найбільш придатну, на нашу думку, для навчання завдяки своїй наочності і простоті користування. У додатках наведено опис цієї програми.

Самостійне вивчення будь-якого предмета має супроводжуватися самоконтролем знань. З цією метою наприкінці кожного розділу вміщено розділ «Підсумки і самоконтроль», в якому увага читача концентрується на основних моментах матеріалу відповідного розділу, вказується література, за допомогою якої можна доповнити та поглибити знання з того чи іншого питання. Наведено також контрольні питання, в яких також увага читача звернена на головне у викладеному матеріалі. Радимо спробувати самостійно відповісти на ці питання, а потім перевірити себе, відшукавши відповідь у тексті розділу.

Виклад матеріалу передбачає наявність у читача знань з фізики і математики у межах програми вищого технічного навчального закладу. Посібник може використовуватись у процесі вивчення таких дисциплін, як «Електротехніка», «Основи теорії кіл», «Теорія електричних кіл», «Процеси в лінійних електронних схемах» і подібних їм.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

A – параметр зв'язку	$h(t)$ – перехідна характеристика
a_{ij} – a -параметри чотириполюсника	I – діюче значення струму
B – реактивна складова провідності	\underline{I} – комплексна амплітуда струму
B_C – реактивна провідність ємності	I_k – контурний струм
B_L – реактивна провідність індуктивності	I_B – реактивна складова струму
C – ємність	I_R – активна складова струму
C_d – диференціальна ємність	I_m – амплітуда струму
C_k – ємність колекторного переходу	I_0 – постійна складова струму
C_0 – статична ємність	$I(p)$ – операторне зображення струму
C_1 – погонна ємність	i – струм, миттєве значення струму
E – напруга джерела, задавальна напруга	i_B – струм бази
E_m – амплітуда напруги джерела	i_B – струм витоку
$F(\omega)$ – модуль схемної функції, амплітудно-частотна характеристика	i_E – струм емітера
$\underline{F}(\omega)$ – комплексна схемна функція	i_K – струм колектора
$F(p)$ – операторна схемна функція	i_C – струм стоку
f – частота	$i_{\text{вих}}$ – вихідний струм
f_{ij} – f -параметри чотириполюсника	$i_{\text{вх}}$ – вхідний струм
f_p – резонансна частота	$i(t)$ – миттєва величина струму
G – провідність, активна складова провідності	\underline{i} – змінна складова струму
$G_{\text{вих}}$ – вихідна провідність	J – струм джерела, задавальний струм
$G_{\text{вн}}$ – внутрішня провідність	j – уявна одиниця
$G_{\text{вх}}$ – вхідна провідність	k_n – коефіцієнт прямокутності
G_n – провідність навантаження	$K_{6.x}$ – коефіцієнт біжної хвилі
$G_{\text{пер}}$ – передавальна провідність	$k_{3в}$ – коефіцієнт зв'язку
G_1 – погонна провідність	$K_{сх}$ – коефіцієнт стійкої хвилі
g_{ij} – g -параметри чотириполюсника	K_i – коефіцієнт передачі струму
$g(t)$ – імпульсна характеристика	\underline{K} – комплексний коефіцієнт передачі струму
$G(p)$ – операторне зображення імпульсної характеристики	K_p – коефіцієнт передачі потужності
$H(p)$ – операторне зображення перехідної характеристики	K_U – коефіцієнт передачі напруги
h_{ij} – h -параметри чотириполюсника,	\underline{K}_U – комплексний коефіцієнт передачі напруги
	L – індуктивність
	L_1 – погонна індуктивність

l — довжина лінії
 M — взаємна індуктивність
 n — коефіцієнт трансформації
 P — активна, середня потужність
 P_0 — потужність постійної складової струму
 P_{\sim} — потужність змінної складової струму
 P_{\max} — максимальна потужність
 p — комплексна частота, оператор диференціювання
 p_k — корені характеристичного рівняння, полюси схемної функції
 p_i — коефіцієнт відбиття струму
 p_u — коефіцієнт відбиття напруги
 $p(t)$ — миттєва потужність
 Q — реактивна потужність, добротність
 Q_e — еквівалентна добротність
 Q_C — добротність конденсатора
 Q_L — добротність котушки
 q — електричний заряд
 R — опір, активна складова опору
 $R_{\text{вих}}$ — вихідний опір
 $R_{\text{вн}}$ — внутрішній опір
 $R_{\text{вх}}$ — вхідний опір
 $R_{\text{ер}}$ — опір еквівалентний резонансний
 $R_{\text{н}}$ — опір навантаження
 $R_{\text{пер}}$ — передавальний опір
 R_1 — погонний опір
 r — опір
 r_{ij} — r -параметри чотириполюсника, транзистора
 S — повна потужність
 \underline{S} — комплексна потужність
 $\underline{S}(\omega)$ — спектральна характеристика
 $S(\omega)$ — модуль спектральної характеристики

T — період
 t — час
 t_0 — початковий момент часу
 U — діюче значення напруги
 \underline{U} — комплексна амплітуда напруги
 U_m — амплітуда напруги
 U_0 — постійна складова напруги
 U_R — активна складова напруги
 U_X — реактивна складова напруги
 $U(p)$ — операторне зображення напруги
 u — напруга
 $u(t)$ — миттєва напруга
 $u_{\text{вих}}$ — вихідна напруга
 $u_{\text{вх}}$ — вхідна напруга
 $u_{\text{ж}}$ — напруга джерела живлення
 u_{\sim} — змінна складова напруги
 V — вузлова напруга
 v_c — швидкість електромагнітних хвиль
 v_{ϕ} — фазова швидкість
 W — енергія
 W_C — енергія електричного поля
 W_L — енергія магнітного поля
 w — число витків котушки
 X — реактивна складова опору
 X_C — реактивний опір ємності
 X_L — реактивний опір індуктивності
 $X_{\text{зв}}$ — реактивний опір зв'язку
 Y — повна провідність
 \underline{Y} — комплексна провідність
 \tilde{Y} — середня провідність
 $\underline{Y}_{\text{вх}}$ — вхідна комплексна провідність
 $Y(p)$ — операторна провідність
 Z — повний опір, модуль комплексного опору
 \underline{Z} — комплексний опір
 $\underline{Z}_{\text{вх}}$ — вхідний комплексний опір
 $\underline{Z}_{\text{вих}}$ — вихідний комплексний опір

$Z(p)$ — операторний опір	хвильовий опір
Z_0 — комплексний хвильовий опір	σ — дійсна частина комплексної частоти
α — коефіцієнт фази хвилі	τ — стала часу
β — кут втрат, коефіцієнт згасання хвилі, коефіцієнт підсилення струму бази	τ_e — еквівалентна стала часу
γ — коефіцієнт розповсюдження хвилі	τ_C — стала часу RC -ланцюжка
Δ — визначник матриці	τ_L — стала часу RL -ланцюжка
Δ^G — визначник матриці провідностей	Φ — магнітний потік
Δ^R — визначник матриці опорів	Φ_S — магнітний потік розсіювання
$\Delta_{i,j}$ — алгебраїчне доповнення визначника	φ — зсув фаз між напругою і струмом
$\Delta\omega$ — абсолютне розстроєння	φ_0 — початкова фаза
$\delta_{\text{нп}}$ — згасання хвилі	$\varphi(\omega)$ — фазочастотна характеристика
ε — діелектрична проникність	χ — узагальнене розстроєння
η — відносне розстроєння, коефіцієнт корисної дії	$\chi_{\text{гр}}$ — граничне узагальнене розстроєння
θ — приведений час	ψ — магнітне потокозчеплення
λ — довжина хвилі	ψ_S — магнітне потокозчеплення розсіювання
μ — магнітна проникність	$\psi(t)$ — фаза гармонічного коливання
$\Pi_{0,7}$ — смуга пропускання	Ω, ω — кругова частота
Π_S — ширина спектра	$\omega_{\text{гр}}$ — гранична кругова частота
ρ — характеристичний опір,	ω_p — резонансна кругова частота
	$\bar{\omega}$ — зведена частота

СПИСОК ЗАГАЛЬНИХ АБРЕВІАТУР

АЧХ	— амплітудно-частотна характеристика
ВАХ	— вольт-амперна характеристика
ЕК	— електричне коло
ЕРС	— електрорушійна сила
ЗКН	— закон Кірхгофа для напруг
ЗКС	— закон Кірхгофа для струмів
ІХ	— імпульсна характеристика
ККД	— коефіцієнт корисної дії
ЛЧХ	— логарифмічна частотна характеристика
ОП	— операційний підсилювач
ПХ	— перехідна характеристика
ПЧ	— прохідний чотириполюсник
РФ	— режекторний фільтр
СФ	— схемна функція, смуговий фільтр
ФВЧ	— фільтр верхніх частот
ФНЧ	— фільтр нижніх частот
ФЧХ	— фазочастотна характеристика
ЧХ	— частотна характеристика

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

1.1. Загальні відомості

Радіoeлектроніка – це галузь науки і техніки, що охоплює методи і технічні засоби створення, використання пристроїв з метою одержання, передачі, оброблення й використання інформації за допомогою електромагнітних хвиль.

Для ознайомлення з принципами і проблемами радіoeлектроніки необхідно впровадити поняття сигналу. Інформація передається каналами зв'язку за допомогою *сигналів* – фізичних процесів, які відбуваються у часі і просторі і які називають *фізичним носієм сигналу*. Сигнал характеризується деякою фізичною величиною: струмом, напругою, звуковим тиском та ін. Зміни величини сигналу у часі повинні відповідати інформації, що передається. Розрізняють *сигнали аналогові, модульовані та цифрові*. В аналогових сигналах інформація міститься у змінах миттєвої величини сигналу, у модульованих – зміна якого-небудь параметра: амплітуди, частоти, фази, тривалості. У цифрових сигналах інформація представлена комбінаціями дискретних значень сигналу. У сучасних системах зв'язку застосовують двійкові цифрові коди. Це сигнали, що мають два дискретні рівні, яким присвоюють значення 0 (нуля) і 1 (одиниці).

Зміна фізичної величини у часі називається *коливанням*, а зміна у часі і просторі – *хвилею*. Тож сигнали являють собою коливання і хвилі. У радіoeлектронних каналах зв'язку використовуються як сигнали електромагнітні процеси у різних середовищах (коливання струмів і напруг) і вільному просторі (електромагнітні хвилі).

Розглянемо основні принципи побудови й особливості *радіоканалів*. Сигнал має бути узгодженим із каналом зв'язку. Це зумовлено особливостями фізичних процесів, що використовуються як сигнал. Найважливішою відмінністю електромагнітних процесів є гранично можлива швидкість поширення, що дорівнює швидкості світла $v_c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Саме це зумовило необхідність використання у радіоканалах сигналів досить високих частот. Зауважимо, що випромінювання хвиль будь-яким випромінювачем ефективне, коли його геометричні розміри l сумірні з довжиною хвилі λ . Швидкість хвилі v_c , її довжина λ і частота f пов'язані співвідношенням

$$f = v_c / \lambda. \quad (1.1)$$

Із конструктивних міркувань розміри антен не повинні перевищувати кілька тисяч метрів. Наприклад, якщо $l = \lambda = 3\,000$ м, тоді з (1.1) знаходимо відповідну частоту $f = 100$ кГц. Таким чином, частоти радіосигналів повинні перевищувати 100 кГц. Для передачі інформації вона повинна бути перетворена у сигнал, який формується за допомогою таких пристроїв, як мікрофони, фотоелектронні прилади, різні давачі.

Частоти таких сигналів зазвичай лежать у діапазоні звукових чи ультразвукових частот. Наприклад, стандартний телефонний канал займає смугу частот від 300 Гц до 3,4 кГц, що відповідає довжинам хвиль від 1 000 до 88 км. Зрозуміло, що випромінювання хвиль з такою довжиною практично неможливе. Тому в радіоканалах використовують модульовані високочастотні сигнали, в яких який-небудь параметр змінюється відповідно до миттєвої величини модулюючого сигналу, що передається.

Є ще одна причина застосування модуляції. Річ у тому, що шляхом модуляції низькочастотний сигнал можна перенести на будь-яку носійну частоту, одержавши водночас багато каналів зв'язку, що відрізняються частотою. Згідно з (1.1) бачимо, що чим менша довжина хвилі, тим більший діапазон частот. Тому освоєння діапазонів дедалі коротших хвиль завжди було важливо для радіотехніки. Наразі йде освоєння міліметрових, інфрачервоних і оптичних довжин хвиль.

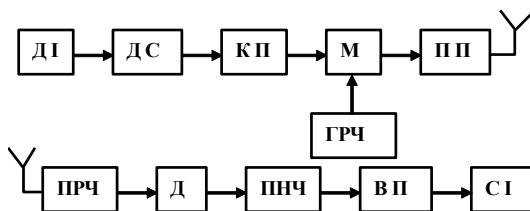


Рис. 1.1

На рис. 1.1 як приклад зображено структурну схему радіоканалу, який складається з передавальної і приймальної частин. Передатальна частина містить джерело інформації ДІ, джерело сигналу ДС, кодувальний пристрій КП, модулятор М, підсилювач потужності ПП, генератор радіочастоти ГРЧ. Джерело сигналу виробляє сигнал, який відповідає інформації, що надходить від ДІ і має бути переданим через радіоканал. Далі сигнал кодується для підвищення завадостійкості або засекречування і як модулюючий подається на вхід

модулятора. На модулятор подається також носійне високочастотне коливання від ГРЧ. Модульований сигнал підсилюється до потрібного рівня потужності у ПП і випромінюється передавальною антеною. Радіохвилі, досягнувши приймальної антени, наводять сигнал, що підсилюється підсилювачем радіочастоти ПРЧ, у якому також виконується *частотна селекція* сигналу, далі детектується детектором Д, підсилюється підсилювачем низької частоти ПНЧ і проходить на вихідний пристрій ВП, в якому перетворюється на форму, прийнятну для споживача інформації СІ.

Як показано вище, при передачі сигналів радіоканалами вони зазнають численних складних перетворень – таких, як модуляція, підсилення, кодування, детектування, перетворення частоти, фільтрація тощо. Ці перетворення, або, як кажуть, оброблення сигналів, виконуються за допомогою пристроїв, що становлять *радіоелектронні кола*. Тому предметом подальшого вивчення будуть радіоелектронні кола та пристрої, принципи їхньої дії та процеси оброблення сигналів у них, методи аналізу та синтезу радіоелектронних кіл. Завдання випромінювання та поширення радіохвиль вирішуються без використання електронних приладів, і тому тут не розглядаються. Основою вивчення радіоелектронних пристроїв є теорія кіл і теорія сигналів. *Теорія кіл* займається методами математичного моделювання процесів в електромагнітних колах, їх розрахунками. Вона спирається на певні фізичні закони. *Теорія сигналів* розробляє методи математичного моделювання сигналів. Теорії кіл і сигналів доповнюють одна одну. Теорія кіл не може вивчати процеси в радіоелектронних колах, не оперуючи моделями сигналів, а перетворення сигналів неможливо вивчати у відриві від процесів у колах. Теорії кіл і сигналів використовують певний математичний апарат, знання якого необхідне для вивчення цих теорій, а саме: диференціальне й інтегральне числення, матриці та визначники, комплексні числа, ряди Фур'є, перетворення Лапласа, диференціальні рівняння.

1.2. Електронні кола та основі величини, що їх описують

1.2.1. Електронне коло як фізична система

Електронне коло (ЕК) – це фізична система, що становить сукупність технічних пристроїв – *компонентів*, з'єднаних таким чином, щоб забезпечити умови для певних електромагнітних процесів, які можуть бути описані за допомогою понять струму та напруги.

Компонентами ЕК є *резистори, конденсатори, котушки, трансформатори*, діоди, транзистори, інтегральні мікросхеми, акумулятори тощо. Електромагнітні процеси в колах супроводяться перетвореннями енергії з одних видів на інші. В одних компонентах відбувається перетворення різних видів енергії (механічної, хімічної, теплової та ін.) на енергію електромагнітного поля. Такі компоненти називають *активними*, або ж *джерелами*. Ця енергія накопичується або втрачається колом, перетворюючись на інші види. Компоненти, сконструйовані таким чином, щоб головним процесом у них було накопичення енергії в електричному або магнітному полі, називаються *реактивними*. Компоненти, в яких головним є процес перетворення електромагнітної енергії в інші види, тобто споживання енергії, називаються *резистивними*. Резистивні та реактивні компоненти називаються *пасивними*. Крім джерел, до активних відносять також компоненти, які перетворюють енергію джерел постійної напруги на енергію електричних коливань, наприклад, транзистори в режимах підсилення та генерування.

Вивчення фізичних систем, зокрема ЕК, зводиться до встановлення кількісних залежностей між фізичними величинами, які характеризують стан системи, що називається *математичною моделлю*. Оскільки навколишній світ нескінченно складний, будь-яка наукова теорія вивчає матеріальні об'єкти за допомогою теоретичних моделей, які складаються з ідеальних елементів. Ідеальні елементи одержують шляхом виділення головних властивостей і нехтування несуттєвими у межах даної теорії властивостями реальних об'єктів. Теоретичні моделі ЕК називаються *схемами заміщення*, які будуються з ідеальних *схемних елементів* — таких, як опір, ємність, індуктивність, джерело напруги, джерело струму та ін. Заміна реальних кіл їх схемами заміщення усуває другорядні деталі і зосереджує увагу на головних сторонах складних електромагнітних процесів. Це полегшує вивчення ЕМК. Водночас, вивчення схем заміщення дає змогу дізнатися, які процеси загалом можливі в ЕК і знаходити їх нові різновиди та застосування.

Схеми заміщення зображують у вигляді певних з'єднань схемних елементів, умовні графічні зображення яких наведено у табл. 1.1. Схеми заміщення потрібно відрізняти від *принципових електричних схем*, котрі являють собою умовне графічне зображення з'єднань компонентів в ЕК, тим паче, що схемні елементи зображуються тими самими символами, що й компоненти, наприклад, опір і резистор, ємність і конденсатор (табл. 1.1 і 1.2). На рис. 1.2, *а* подано принципову схему підсилювального каскаду, з якої видно, як з'єднано між собою транзистор $VT1$, резистори $R1, R2, R3$, конденсатори $C1, C2$, котушка $L1$, а на рис. 1.2, *б* – його схему заміщення, складену з елементів: джерел напруги E_c і струму J_K , опорів $R1, \dots, R_n$, ємностей $C1, \dots, C_K$, індуктивності $L1$.

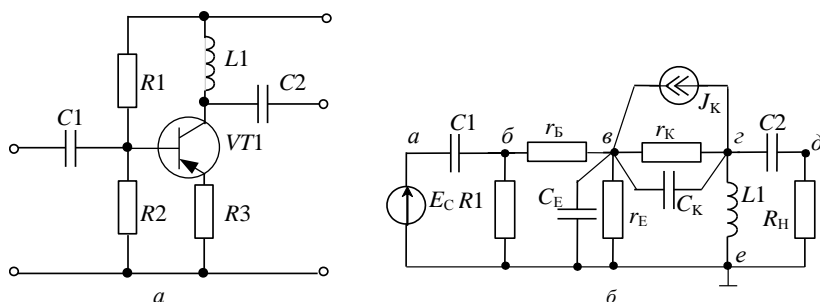
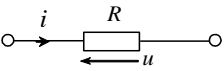
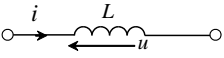
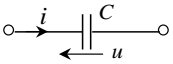
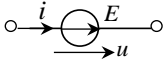
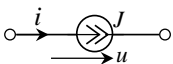
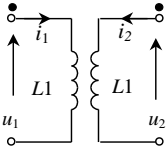


Рис. 1.2

Визначимо низку понять, що стосуються схем. *Віткою* називають частину схеми, в якій протікає один і той самий струм. *Вузлом* називають місце з'єднання двох і більше віток. *Входами схеми* називають місця вмикання джерел або місця визначення реакцій – струмів і напруг, викликаних дією джерел. Останні називають також виходами. *Входи* і *виходи* утворюються парами вузлів (*полісів*). Схема, що має два зовнішні поліси, називається *двополосником*. Схеми, що мають три або більше полісів, за допомогою яких вони з'єднуються з іншими схемами, називаються *багатополосниками* (три-, чотири-, ... полісниками). Багатополосники можуть бути *активними* і *пасивними* залежно від того, містять вони у собі джерела чи ні.

Таблиця 1.1

Схемні елементи	Умовні позначення	Елементні рівняння
Опір		$u(t) = Ri(t),$ $i(t) = Gu(t)$
Індуктивність		$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(x) dx + i(0)$
Ємність		$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + u(0),$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
Джерело напруги		$u(t) = E(t), \quad -\infty < i(t) < \infty$
Джерело струму		$i(t) = J(t), \quad -\infty < u(t) < \infty$
Взаємна індуктивність		$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt}, \\ u_2(t) = \pm M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}. \end{cases}$

У схемі, зображеній на рис. 1.2, a, b, \dots, e є вузлами, елементи $E_C, C1, \dots, L1$ – вітками. Вузли a, e утворюють вхід, до них ввімкнено джерело E_C . Виходом може бути будь-яка пара вузлів, наприклад d, e . Тоді напруга і струм в опорі R_H розглядаються як вихідні величини – реакція на дію джерела. Елементи C_E, R_E утворюють пасивний двополюсник із полюсами e, e , $E_C, C1$ – активний двополюсник із полюсами b, e , елементи $C1, R1$ – триполюсник з полюсами a, b, e . *Контуром* називають частину схеми, утворену такою послідовністю віток, рухаючись по яких можна повернутись у вихідний вузол, не проходячи двічі через інші вузли. Контур, який не має відгалужень всере-

дину, називається *чарункою*. На рис. 1.2, б елементи E_C , $C1$, r_B , r_E утворюють контур, а E_C , $C1$, $R1$ — чарунку. *Переріз*ом схеми називають сукупність віток, які можна перетнути замкнутою лінією. Так, елементи E_C , $R1$, r_B утворюють переріз, а елементи C_E , r_E не є перерізом, бо їх не можна перетнути замкнутою лінією, не перетинаючи інших віток.

1.1.2. Струм, напруга, потужність та енергія

Електричним струмом називають явище направленого руху заряджених часток і явище зміни електричного поля у часі, що супроводяться магнітним полем. Перший вид струму називається струмом провідності, а другий — струмом зміщення. Теорія кіл оперує тільки струмами провідності. При цьому вважається, що струми зміщення зосереджені тільки у ємностях. Мірою струму є сила струму i , що визначається кількістю *електричного заряду* q , перенесеного струмом через переріз провідника на одиницю часу. *Миттєве значення струму* визначається виразом

$$i = dq/dt. \quad (1.2)$$

У системі СІ струм вимірюється в амперах (А), заряд — у кулонах (Кл), час — в секундах (с). Щоб привести в рух заряди й одержати струм, слід до заряджених часток прикласти силу. Таку дію на заряджені частки можна одержати як з боку електричних та магнітних полів, так і за різних процесів, наприклад, у хімічних реакціях, контактних явищах тощо. Силкові поля неелектричної природи, що приводять у рух заряджені частинки, називаються сторонніми. Сторонні поля утворюються у джерелах, де відбувається перетворення різних видів енергії в енергію магнітного поля, пов'язаного зі струмом, і в енергію електричного поля розподілених у колі зарядів. Поза джерелом заряди рухаються під дією електричних полів та змінних у часі магнітних полів, відбираючи накопичену в цих полях енергію. Таким чином, струм, протікаючи через джерело, відбирає у нього енергію і передає її в електричні та магнітні поля компонентів кола, в яких вона врешті-решт перетворюється на інші види. Інтенсивність енергетичних процесів при протіканні струму характеризується *миттєвою напругою* u , що визначається як

$$u = dw/dq, \quad (1.3)$$

де w — прирощення енергії при переміщенні заряду q між двома точками кола. *Миттєву потужність* на ділянці кола знаходять з урахуванням (1.2) і (1.3) за виразом

$$p = dw/dt = ui. \quad (1.4)$$

Напруга вимірюється у вольтах (В), енергія — у джоулях (Дж), потужність — у ватах (Вт). Струм і напруга можуть набирати як додатних, так і від'ємних значень залежно від напрямку протікання струму в даному елементі. Історично склалося так, що додатним напрямком струму вважають напрямок руху позитивно заряджених часток або напрямок, протилежний руху негативних зарядів. Додатний напрямок струму помічають стрілкою на провіднику, як це показано у табл. 1.1. Згадану стрілку можна тлумачити як вказівку напрямку протікання струму, якщо він відомий. Однак у задачах з аналізу напрямки струмів наперед невідомі, і їх проставляють довільно, що означає умовні додатні напрямки гілок схеми. Якщо в результаті аналізу величина струму виявиться додатною, це означатиме, що напрямок струму збігається з напрямком гілки, і навпаки, від'ємна величина струму означає, що струм має протилежний напрямок.

Для напруги є дві можливості: додатним вважати напрямок, що збігається з напрямком струму, чи протилежний напрямок. У літературі можна зустріти обидва варіанти. У нашому посібнику прийнято варіант, за яким напрямки напруги і струму протилежні у пасивних елементах.

Звернемось тепер до формули (1.4). Оскільки u та i в елементі можуть мати однакові чи протилежні напрямки, потужність p матиме додатне чи від'ємне значення. Це означає, що енергія в елементі зростає при $p > 0$ і зменшується при $p < 0$. Тому за нашого вибору напрямків струму і напруги енергія, що її віддають джерела, буде додатною, а енергія, що її забирають пасивні елементи, — від'ємною.

1.3. Елементи електронних схем

1.3.1. Елемент опору

Схемні елементи одержують шляхом ідеалізації реальних компонентів. Наприклад, котушку конструюють таким чином, щоб сконцентрувати магнітне поле і його енергію у певному місці кола. Магнітне поле виникає при протіканні струму, що передбачає наявність електричного поля. Крім того, протікання струму супроводиться втратами енергії. Якщо знехтувати цими втратами та енергією, що накопичується в електричному полі котушки, одержимо ідеальну котушку – *елемент індуктивності*. Нехтування енергією електричного та магнітного полів резистора приводить до поняття *елемента опору*, а нехтування втратами енергії та магнітним полем конденсатора породжує *елемент ємності*.

Схемні елементи є ідеальними об'єктами, наділеними особливими властивостями. Якими саме? Єдиною властивістю схемного елемента, що постулюється, є певний зв'язок між струмом і напругою, який описується рівнянням, що називається *елементним*. *Елементним рівнянням елемента опору* є *закон Ома*

$$u = Ri, \quad (1.5)$$

де коефіцієнт пропорційності R називається *опором* і вимірюється в омах (Ом). Слід відрізнити опір як схемний елемент і опір як параметр схемного елемента. Закон Ома записується також у вигляді

$$i = Gu, \quad (1.6)$$

де коефіцієнт G називається *провідністю* і вимірюється у сименсах (См). Вирази (1.5) і (1.6) описують *вольт-амперну характеристику* опору (ВАХ). У чому полягає ідеальність опору? По-перше, в тому, що у реальних провідниках закон Ома, прямо кажучи, не виконується, тобто R і G більш-менш залежать від струму. А для елемента опору закон Ома постулюється як абсолютно точний. Друга ідеалізація стосується енергетичних властивостей, а саме: опір тільки споживає енергію і не може її накопичувати і віддавати назад у коло. Справді, миттєва потужність в опорі

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2. \quad (1.7)$$

Знак «мінус» враховує прийняті нами напрямки стрілок. Знайдемо енергію, що споживається опором:

$$w_R = \int_{-\infty}^t p dt = \int_{-\infty}^t Ri^2 dt. \quad (1.8)$$

Згідно з (1.8) ця енергія за модулем може тільки зростати з часом, бо підінтегральний вираз невід'ємний, тобто опір не може віддавати енергію на відміну від резистора, який не тільки споживає енергію, а й накопичує хоч і незначну енергію в електричному і магнітному полях. У схемах заміщення використовується елемент – *провідник*, у якого $R = 0$.

1.3.2. Елемент ємності

Розглянемо *елемент ємності*, властивості якого визначаються залежністю заряду від напруги, що називається *вольт-кулонною характеристикою*, а саме:

$$q = Cu, \quad (1.9)$$

де коефіцієнт C називається *ємністю* (параметр), вимірюється у фарадах (Ф).
Із (1.9) і (1.2) знаходимо *елементні рівняння ємності*

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (1.10)$$

$$u = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + u(t_0). \quad (1.11)$$

Ідеалізація елемента ємності полягає в тому, що в (1.9) величина C постулюється незалежною від напруги u . Друга (енергетична) ідеалізація полягає в тому, що ємність, на відміну від конденсатора, не втрачає енергії. Так, згідно з (1.4) і (1.10)

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}, \quad W_C = \int_{-\infty}^t p dt = \int_0^u C u du = \frac{Cu^2}{2}. \quad (1.12)$$

Таким чином, *енергія ємності*, що надходить від кола, визначається миттєвою напругою. При зростанні напруги (незалежно від знака) зростає і ене-

ргія, а при зменшенні — енергія зменшується, тобто віддається назад у коло, причому без втрат: $W_c = 0$ при $u = 0$.

1.3.3. Елемент індуктивності

Властивості *елемента індуктивності* визначаються *вебер-амперною характеристикою*

$$\psi = Li, \quad (1.13)$$

де Ψ — магнітне потокозчеплення, вимірюване у веберах (Вб), L — *індуктивність* (параметр), що вимірюється у генрі (Гн). За *законом електромагнітної індукції*

$$u = \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1.14)$$

звідки одержуємо *елементні рівняння елемента індуктивності*:

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad (1.15)$$

$$i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(x) dx + i(t_0). \quad (1.16)$$

Ідеалізація елемента індуктивності полягає, по-перше, у тому, що постулюється сталість L , незалежно від величини струму, і по-друге, в тому, що індуктивність на відміну від котушки здатна накопичувати енергію і віддавати її у коло без втрат. Справді, згідно з (1.4) і (1.15) знаходимо потужність і *енергію індуктивності*

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}, \quad W_L = \int_{-\infty}^t p dt = \int_{-\infty}^t Li dt = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.17)$$

Вираз (1.17) тлумачиться аналогічно (1.12).

1.3.4. Взаємна індуктивність

Магнітне потокозчеплення котушки може визначатися не тільки струмом у ній, але й струмом в іншій котушці, якщо частина магнітного потоку останньої перетинає витки першої. Це вимагає введення ще одного елемента — взаємної індуктивності, властивості якого визначаються рівняннями:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2, \quad \Psi_2 = L_2 i_2 \pm M i_1, \quad (1.18)$$

де $\Psi_1, \Psi_2, i_1, i_2, L_1, L_2$ — потокозчеплення, струми й індуктивності першої та другої котушок, а M — *взаємна індуктивність*, що вимірюється також у генрі. Знак перед M визначається напрямками власного і взаємного магнітних потоків: якщо вони збігаються — ставиться знак «плюс», і знак «мінус» — якщо вони протилежні. На схемах у магнітопов'язаних індуктивностей точками позначаються *однойменні виводи*. Це означає: якщо струми направлені однаково відносно цих виводів, то магнітні потоки спрямовані однаково і у рівняннях (1.18) слід ставити знак плюс перед M . Із (1.18), згідно з (1.14), одержуємо елементні рівняння взаємної індуктивності:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

1.3.5. Активні елементи схем

Активні елементи — джерело напруги і джерело струму — мають такі елементні рівняння (непогано б було їх намалювати із ВАХ реальних та ідеальних джерел):

$$u = E, \quad -\infty < i < \infty;$$

$$i = I, \quad -\infty < u < \infty,$$

де E, I називають відповідно задавальними напругою і струмом. Ідеалізація цих елементів полягає в тому, що постулюється незалежність напруги від струму в джерелі напруги і струму від напруги у джерелі струму, а також здатність цих джерел розвивати нескінченну потужність (краще написати окремо про кожне джерело із значенням їх внутрішніх опорів).

Неважко помітити, що набір схемних елементів відображає основні енергетичні процеси в ЕМК: надходження енергії в коло від джерел, накопичення енергії в електричному і магнітному полях, а також втрати енергії колом.

Для моделювання активних керованих компонентів радіоелектронних кіл використовують ідеальні *залежні джерела*. Їх елементні рівняння мають такий вигляд (непогано б було їх намалювати):

$$\begin{aligned} \text{у джерела напруги, керованого напругою (ДНКН), } u &= \mu u_k; \\ \text{у джерела напруги, керованого струмом (ДНКС), } u &= \rho i_k; \\ \text{у джерела струму, керованого напругою (ДСКН), } i &= \delta u_k; \\ \text{у джерела струму, керованого струмом (ДСКН), } i &= \beta i_k. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тут i_k, u_k – *керуючі струм і напруга*, які діють не на полюсах джерела, а на деякому вході схеми. Ідеальність цих джерел полягає у сталості їх параметрів і у здатності їх розвивати нескінченну потужність. Розглянуті схемні елементи і їх елементні рівняння зведено у табл. 1.1.

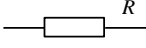
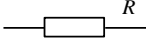
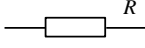
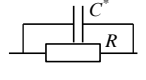
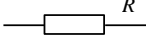
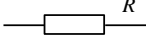
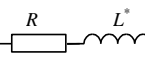
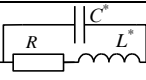
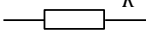
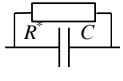
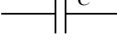
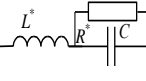
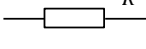
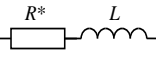
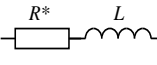
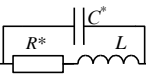
1.3.6. Схемні елементи реальних кіл

Розглянемо, як у схемах заміщення враховується неідеальність реальних компонентів ЕМК. Зауважимо, що компоненти конструюються таким чином, щоб у кожному з них переважало або споживання енергії (резистори), або її накопичення (конденсатори, котушки). Відповідно компоненти характеризуються *основними параметрами* (опір резистора, ємність конденсатора тощо) і неосновними, паразитними – такими, як індуктивність дровового резистора, провідність витоку конденсатора, міжвиткова ємність котушки тощо.

Паразитні параметри можуть незначно або суттєво впливати на процеси в ЕМК залежно від режиму роботи. Так, із (1.10) випливає, що струм у ємності пропорційний швидкості зміни напруги. Чим вища частота, тим швидше змінюється напруга і тим значніші ємнісні струми. Тому чим вищі робочі частоти, тим менші ємності потрібно враховувати, а у режимі постійних напруг ємнісні струми дорівнюють нульові і зі схеми заміщення можна вилучити не тільки паразитні, а й основні ємності.

Аналогічно за допомогою рівняння (1.15) можна показати, що чим вище частота, тим значніший спад напруги на індуктивності і тим менші індуктивності потрібно враховувати у схемах заміщення. На постійному ж струмі напруги на індуктивностях дорівнюють нулеві і їх можна у схемі замкнути.

Таблиця 1.2

Компоненти	Схеми заміщення			
	Постійний струм	Низькі частоти	Середні частоти	Високі частоти
Резистор плівковий				
Резистор дріотяний				
Конденсатор				
Котушка				

У табл. 1.2 наведено приклади схем заміщення компонентів у різних діапазонах частот, причому паразитні параметри помічено зірочкою. Зауважимо, що поділ частот на низькі, середні і високі є індивідуальним для кожного компонента і залежить від його конструкції. Так, для плівкових резисторів високими є частоти у десятки і сотні мегагерц, а для дріотяних – лише десятки або сотні кілогерц. Кожен компонент має свій робочий діапазон частот, у якому паразитні параметри мають найменший вплив і в якому даний компонент найбільш наближається до відповідного схемного елемента.

КМ 2.4. Виконати завдання з підрозділу 2.6.1.

1.4. Фізичні закони електронних кіл

1.4.1. Закони Кірхгофа

Елементні рівняння встановлюють залежності між струмом і напругою окремих елементів. Взаємодія ж елементів у схемі описується законами Кірхгофа, які поряд з елементними рівняннями є, по суті, аксіомами теорії електромагнітних кіл.

Візьмемо замкнену поверхню, що перетинає провідники зі струмами i_k . Струми, спрямовані всередину поверхні, вносять заряд, а струми, спрямовані назовні, виносять заряд. Якщо заряд всередині поверхні буде змінюватись, то поверхню перетинатимуть також струми зміщення i_3 . З електродинаміки

відомо, що $i_3 + \sum_{k=1}^n i_k = 0$, або $\sum_{k=1}^n i_k \approx 0$, якщо можна знехтувати струмами зміщення. Оскільки у схемах заміщення електричне поле зосереджено тільки у ємностях, то саме в них протікають струми зміщення. Тому можна стверджувати, що *для будь-якого перерізу схеми алгебраїчна сума миттєвих значень струмів віток (гілок), що перетинаються цим перерізом, дорівнюють нулеві, причому струми, направлені всередину і назовні перерізу, беруть із протилежними знаками*. Це твердження називають *законом Кірхгофа для струмів (ЗКС)*. Для перерізу, що має n віток, ЗКС записується так:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (1.20)$$

Зауважимо, що рівняння (2.19) ЗКС є наслідком закону збереження заряду.

Розглянемо заряд Δq , що переміщується у замкнутому контурі. Розіб'ємо контур на ділянки з напругами u_1, u_2, \dots, u_n , серед яких можуть бути і напруги джерел. Якщо напрямком переміщення заряду збігається з напрямком напруги u_k , то заряд одержує енергію $\Delta q u_k$. Якщо ж ці напрямки протилежні, то заряд віддає енергію, що втрачається, або накопичується в електричному полі. У всьому контурі діє також напруга самоіндукції u_i . Якщо напрямки переміщення заряду і напруги u_i збігаються, то магнітне поле віддає енергію, а якщо протилежні — одержує енергію від заряду. Оскільки енергія, одержана зарядом від джерел, повністю віддається електромагнітному полю або втрачається при переміщенні заряду в замкнутому контурі, що витікає із

закону збереження енергії, то $\Delta q u_i + \sum_{k=1}^n \Delta q u_k = 0$ або $u_i + \sum_{k=1}^n u_k = 0$, оскільки

$\Delta q \neq 0$. Якщо напруга u_i мала порівняно з рештою суми, то $\sum_{k=1}^n u_k \approx 0$. У

схемах заміщення магнітне поле зосереджено в індуктивностях, причому напруга на елементі індуктивності, згідно з (2.14), є напругою самоіндукції.

Тому напруга u_i замкненого контура схеми дорівнює сумі напруг індуктивностей, що входять до цього контура. Таким чином, для будь-якого замкненого контура схеми

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0, \quad (1.21)$$

причому ця сума містить у собі як напруги джерел, так і напруги пасивних елементів, включаючи індуктивності. Рівняння (1.21) описує закон Кірхгофа для напруг (ЗКН), що формулюється так: для будь-якого замкненого контуру схеми алгебраїчна сума миттєвих значень напруг на окремих ділянках цього контуру дорівнює нулю, причому напруги, що збігаються з довільно обраним напрямком обходу контуру і протилежні до цього напрямку, беруться з протилежними знаками. Зауважимо, що ЗКН є наслідком закону збереження енергії.

Необхідним етапом розв'язання задач теорії кіл є складання рівнянь, що визначають залежності між струмами і напругами схеми. Ці рівняння складаються на основі елементних рівнянь і законів Кірхгофа. Кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих змінних, і вони мають бути незалежними, тобто жодне рівняння не повинно впливати з інших. Така система рівнянь називається повною.

Приклад 1.1. У колі (рис. 1.3) визначити всі струми та напруги у колі. Перевірити виконання балансу потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори у Ом, струми – А, напруги – В. Зробити висновки про режими роботи джерел.

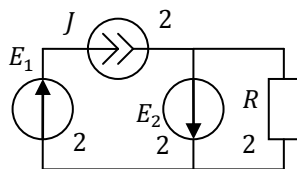


Рис. 1.3

Розв'язання

За законом Ома

$$I_R = \frac{E_2}{R} = \frac{2}{2} = 1 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_E = J + I_R = 2 + 1 = 3 \text{ А.}$$

За другим законом Кірхгофа

$$U_J = E_1 + E_2 = 2 + 2 = 4 \text{ В.}$$

Перевіримо виконання балансу потужностей.

Потужність споживача

$$P_R = I_R^2 R = 1^2 \cdot 2 = 2 \text{ Вт.}$$

Потужність джерела струму (рис. 1.4)

$$P_J = -U_J \cdot J = -4 \cdot 2 = -8 \text{ Вт.}$$

Оскільки $P_J = -16 < 0$, отже джерело струму споживає енергію.

Потужність джерел напруги

$$P_{E1} = E_1 \cdot J = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Вт;}$$

$$P_{E2} = E_2 \cdot I_E = 2 \cdot 3 = 6 \text{ Вт.}$$

Потужність, що виділяється у джерелах напруги

$$P_E = P_{E1} + P_{E2} = 4 + 6 = 10 \text{ Вт.}$$

Оскільки $P_E = 10 > 0$, отже джерела напруги віддають енергію.

Загальна потужність джерел

$$P_{дж} = P_J + P_E = 10 - 8 = 28 \text{ Вт.}$$

Оскільки $P_R = P_{дж} = 28 \text{ Вт}$, то баланс потужностей виконується.

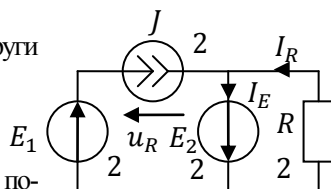


Рис. 1.4

Відповідь: $I_E = 3 \text{ мА}, I_R = 1 \text{ мА}, u_J = 4 \text{ В}, P = 2 \text{ мВт.}$

Приклад 1.2. У колі (рис. 1.5) визначити всі струми та напруги у колі. Перевірити виконання балансу потужностей. Числові значення елементів наведені на схемі: опори у Ом, струми – А, напруги – В. Зробити висновки про режими роботи джерел.

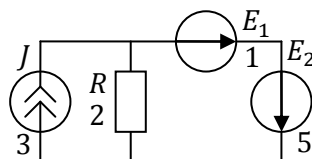


Рис. 1.5

Розв'язання

За другим законом Кірхгофа

$$u_R = E_1 + E_2 = 1 + 5 = 6 \text{ В.}$$

За законом Ома

$$I_R = \frac{u_R}{R} = \frac{6}{2} = 3 \text{ мА.}$$

За першим законом Кірхгофа

$$I_E = I_R + J = 3 + 3 = 6 \text{ А.}$$

Перевіримо виконання балансу потужностей.

Потужність споживача

$$P_R = I_R^2 R = 3^2 \cdot 2 = 18 \text{ Вт.}$$

Потужність джерела струму

$$P_J = -u_R \cdot J = -6 \cdot 3 = -18 \text{ Вт.}$$

Оскільки $P_J = -18 < 0$, отже джерело струму споживає енергію.

Потужність джерел напруги (рис. 1.6)

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_E = 1 \cdot 6 = 6 \text{ Вт;}$$

$$P_{E2} = E_2 \cdot I_E = 5 \cdot 6 = 30 \text{ Вт.}$$

Потужність, що виділяється у джерелах напруги

$$P_E = P_{E1} + P_{E2} = 6 + 30 = 36 \text{ Вт.}$$

Оскільки $P_E = 36 > 0$, отже джерела напруги віддають енергію.

Загальна потужність джерел

$$P_{\text{дж}} = P_J + P_E = -18 + 36 = 18 \text{ Вт.}$$

Оскільки $P_R = P_{\text{дж}} = 18 \text{ Вт}$, то баланс потужностей виконується.

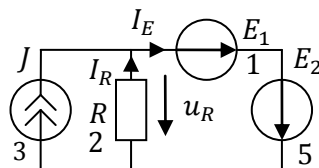


Рис. 1.6

Відповідь: $I_E = 6 \text{ мА}, I_R = 3 \text{ мА}, u_R = 6 \text{ В}, P = 18 \text{ мВт.}$

1.4.2. Принцип дуальності

Випишемо елементні рівняння, закони Кірхгофа і закони неперервності (див. табл. 1.3).

Таблиця 1.3

$U = Ri$	$i = GU$
$U = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$
$U = \frac{1}{C} \int i dt$	$i = \frac{1}{L} \int u dt$
$\sum_{k=1}^n U_k = 0$	$\sum_{k=1}^n i_k = 0$

Якщо у формулах першої колонки замінити величини таким чином:

$$R \leftrightarrow G, C \leftrightarrow L, U \leftrightarrow i, q \leftrightarrow \Psi, \quad (1.22)$$

то одержимо формулу другої колонки. Ця властивість законів ЕМК називається *дуальністю*, а величини (1.22) – *дуальними*. Крім дуальних величин, є дуальні поняття, наприклад, переріз і контур. Як зазначено вище, елементні рівняння і закони Кірхгофа є аксіомами теорії ЕМК, і всі результати теорії кіл — наслідок згаданих аксіом. Але оскільки аксіоми дуальні, то якщо в будь-якій формулі чи теоремі замінити всі величини і поняття на дуальні, одержимо теж правильну формулу чи теорему, дуальну попередній. Це називається *принципом дуальності*.

1.5. Класифікація і основні властивості електронних кіл

1.5.1. Лінійні та нелінійні кола

У літературі можна зустріти такі назви кіл, як електротехнічні, радіоелектронні тощо. Вони відрізняються лише застосуваннями і виглядом компонентів, а не природою процесів у них, які є електромагнітними. Тому все це — електромагнітні кола. Радіоелектронні кола можна означити як електромагнітні кола, що містять електронні компоненти і застосовуються в радіоелектронних пристроях. Основними класифікаційними ознаками електромагнітних кіл є *лінійність*, *інерційність*, *зосередженість* і *стаціонарність*. Розглянемо докладніше ці ознаки.

Коло називається *лінійним*, якщо параметри його компонентів сталі і не залежать від інтенсивності процесів у них, інакше кажучи, від величин струмів і напруг. Поняття лінійного кола є ідеалізацією, оскільки параметри реальних компонентів завжди більш-менш залежать від струмів чи напруг у них. Однак, за певних умов ця залежність виявляється настільки слабо, що не має практичного значення і її можна не брати до уваги. Ця обставина і дає поняття лінійного кола.

Нелінійним називається коло, в якому хоча б один параметр суттєво залежить від струму чи напруги. Лінійні кола описуються лінійними алгебраїчними і (або) диференціальними рівняннями. Звідси їх назва — лінійні. Відомо, що лінійні рівняння мають загальні методи розв'язання, тоді як нелінійні рівняння розв'язуються зазвичай різними наближеними методами. Така відмінність математичного апарату призвела до поділу теорії кіл на теорію лінійних і нелінійних кіл.

Лінійні кола мають визначальні особливості. Найважливіша з них полягає в тому, що в лінійних колах виконується *принцип накладання (суперпозиції)*: *якщо в колі діє кілька джерел, то будь-яка змінна реакції (струм чи напруга), викликана дією всіх джерел, дорівнює алгебраїчній сумі складових, зумовлених дією кожного джерела окремо.*

Друга особливість полягає в тому, що під дією джерела гармонічного струму чи напруги у лінійному колі встановлюється режим гармонічних коливань, коли всі струми і напруги змінюються за гармонічним законом.

1.5.2. Інерційні і неінерційні кола

Розглянемо інерційність кіл. У будь-якому колі накопичується енергія. Енергія електричного поля визначається ємностями і напругами на них, а енергія магнітного поля — індуктивностями та струмами в них. Оскільки енергія не може змінюватись миттєво, ці напруги і струми не можуть змінюватися стрибкоподібно, що впливає також із законів неперервності. Тому після початку дії джерел реакція встановлюється не відразу, а через деякий час — час перехідного процесу. Зрозуміло, що чим менше накопичено енергії, тим менша інерційність кола. Якщо тривалість дії велика порівняно з часом перехідного процесу, то рештою можна знехтувати, що приводить до поняття неінерційного кола. Це теж ідеалізація, оскільки таке коло не накопичує енергії. Тому такі кола моделюються схемами заміщення, що складаються тільки з резистивних опорів.

1.5.3. Кола із зосередженими та розподіленими параметрами

Поділ кіл на зосереджені та розподілені пов'язаний зі скінченністю швидкості розповсюдження електромагнітних процесів V_c у просторі. Уявімо коло, відстань між входом і виходом якого дорівнює l . Якщо до входу ввімкнути джерело, то на виході реакція з'явиться (але встановиться) із запізненням

$$\Delta t = l/V_c.$$

Якщо тривалість процесу в колі $T \gg \Delta t$, то запізненням можна знехтувати, що приводить до поняття зосередженого кола. Можна вивести іншу умову зосередженості. Нехай на вході діє джерело гармонічної напруги з періодом T . Тоді умова зосередженості набуде вигляду $T \gg l/V_c$, або

$$\lambda \gg l, \quad (1.23)$$

де $\lambda = TV_c$ — довжина електромагнітної хвилі. Отже, якщо розміри кола малі порівняно з довжиною хвилі, таке коло можна розглядати як зосереджене, що випливає з (1.23).

Як вже зазначалося, із зростанням частоти схеми заміщення ускладнюються, бо доводиться враховувати дедалі менші ємності й індуктивності. З іншого боку, зі збільшенням частоти зменшується довжина хвилі, наближаючись до розмірів кола, поки не стане сумірною з ними, а схема заміщення ускладнюється настільки, що втрачається сенс моделювання кола схемою заміщення. Це призводить до відмови від теорії кіл і переходу до теорії електромагнітного поля. Кола зосе-

реджені називають також колами із зосередженими параметрами. Це кола, котрі можуть моделюватися схемами зі скінченним числом елементів, тоді як кола з розподіленими параметрами моделюються схемами з нескінченним числом елементів із нескінченно малими параметрами. Теорія кіл з розподіленими параметрами, що викладена далі, є проміжною між теорією кіл і теорією поля.

1.5.4. Кола стаціонарні та параметричні

ЕК поділяються на стаціонарні і параметричні залежно від того, чи змінні у часі їхні параметри. Параметричні кола можуть бути лінійними чи нелінійними. У лінійних параметричних кіл параметри залежать тільки від часу, а не від струмів і напруг. У нелінійних параметричних кіл параметри залежать як від часу, так і від величин струмів і напруг. У лінійних параметричних, як і в лінійних стаціонарних, колах виконується принцип накладення. Параметричні кола описуються диференціальними рівняннями зі змінними параметрами.

1.5.5. Ідеалізації в теорії кіл

Реальні кола, точніше кажучи, є нелінійними, інерційними, розподіленими та параметричними. Ідеалізація кіл – лінійність, неінерційність, зосередженість, стаціонарність – дає змогу значно спростити їх математичний опис. Найпростішими є лінійні неінерційні кола. Їх схеми заміщення складаються лише з опорів і описуються лінійними алгебраїчними рівняннями. Далі за ступенем складності йдуть лінійні інерційні кола, схеми яких, окрім опорів, містять реактивні елементи і описуються лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами. Лінійні розподілені кола описуються диференціальними рівняннями у частинних похідних. Нелінійність призводить до заміни лінійних рівнянь на відповідні нелінійні з усіма впливаючими із цього математичними труднощами. Тому слід намагатися проводити ідеалізацію кола настільки, наскільки це дозволяють умови конкретної задачі.

1.6. Комп'ютерне моделювання електронних кіл

1.6.1. Схемні елементи

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- властивостей схемних елементів;
- амплітудно-фазових співвідношень у режимі гармонічних коливань;
- роботи схемних елементів в імпульсному режимі.

1. Скласти схему (див. рис. 1.7). Від генератора подати гармонічну напругу до досліджуваних схемних елементів R, L, C. Перемикачами S1, S2, S3 підключити по черзі до генератора резистивний, індуктивний і ємнісний елементи. Вольтметр і амперметр перевести у режим АС (змінний струм). На частоті 1 кГц дослідити залежність амплітуди струму у схемному елементі від амплітуди напруги, змінюючи амплітуду генератора від 2 В до 10 В через 2 В. Дані вимірювань звести у таблицю і побудувати графік залежності між амплітудами струму і напруги. При вимірюванні напруги вольтметром і струму амперметром слід брати до уваги, що вони вимірюють діюче значення напруги і струму, яке у $\sqrt{2}$ рази менше від амплітудного значення.

2. Дослідити залежність від частоти повного опору елемента, який за означенням дорівнює відношенню амплітуди напруги до амплітуди струму, або відношенню діючих значень напруги і струму. Встановити на генераторі амплітуду напруги 10 В і, змінюючи частоту генератора від 200 Гц через 200 Гц до 2 000 Гц, виміряти вольтметром і амперметром напругу і струм на кожній частоті. За цими вимірами розрахувати опори і побудувати на одному графіку залежності від частоти повних опорів елементів.

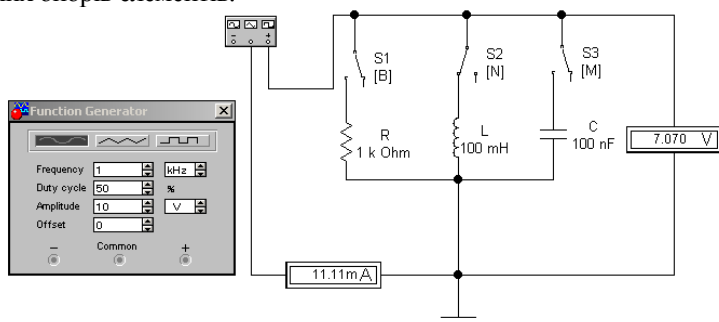


Рис. 1.7

3. Дослідити залежність опору індуктивного елемента від величини індуктивності й опору ємнісного елемента від величини ємності. Для цього замінити на частоті 1 кГц опір індуктивного елемента для величин індуктивності 50, 100, 200 мГн, а також ємнісного елемента для величин ємності 20, 50, 100, 200, 500 нФ. Побудувати графіки залежності опору елементів від величини індуктивності і ємності.

4. Дослідити фазові співвідношення у схемних елементах, зібравши схему (див. рис. 1.8). Встановити на генераторі частоту 1 кГц і амплітуду напруги 10 В. Задати параметри елементів, показані на рис. 1.8. Канали осцилографа переключити в режим АС (змінний струм). У схемі (див. рис. 1.8) застосовано джерело напруги E , кероване струмом, на виході якого формується напруга, пропорційна струму. Отже, на вхід А осцилографа подається напруга, прикладена до елемента, а на вхід В — напруга, що пропорційна струму.

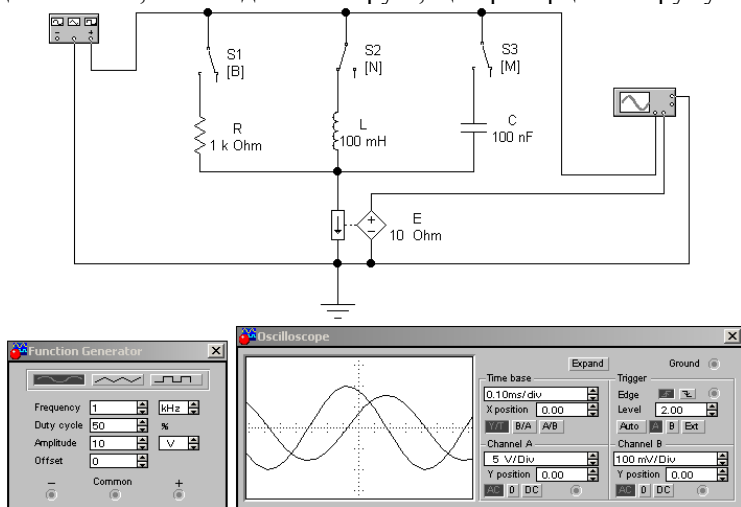


Рис. 1.8

У режимі розгортки осцилографа Y/T спостерігати осцилограми напруги і струму схемного елемента. Зарисувати осцилограми, вказавши осцилограму напруги і осцилограму струму. За осцилограмами визначити, яке з коливань випереджає по фазі, а яке відстає. Для вимірювання різниці фаз (зсуву фаз) треба перейти до розгорнутого зображення осцилографа (див. рис. 2.12). Зсув фаз визначається за формулою

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 2\pi \frac{\Delta t}{T}, \quad (2.26)$$

де $\Delta t = t_u - t_i$ — зсув у часі коливань напруги і струму, t_u, t_i — моменти, що відповідають однаковим фазам коливань напруги і струму, наприклад амплітудним або нульовим значенням; T — період коливання. Величини $\Delta t = t_u - t_i$ та T можна заміряти за осцилограмами на екрані осцилографа, встановивши візирні риски на відповідні моменти часу (див. рис. 1.9). При цьому можна прочитати у правому табло на передній панелі осцилографа інтервал часу $T_2 - T_1$ між моментами, поміченими візирними рисками. Переміщувати візирні риски можна мишею, взявшись за трикутник угорі риски.

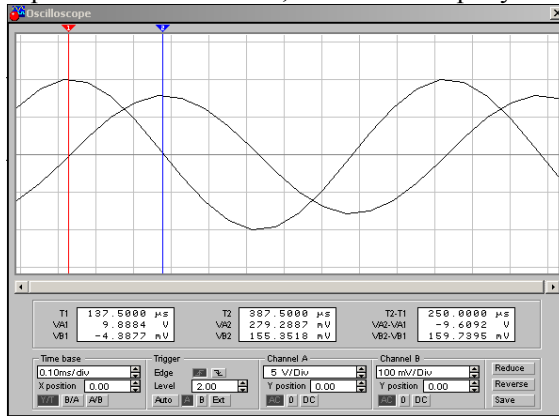


Рис. 1.9

Зсув фаз можна також виміряти, переключивши осцилограф у режим А/В і отримавши на екрані осцилографа динамічну вольт-амперну характеристику елемента у вигляді фігури Лісажу (рис. 1.10). Тоді зсув фаз можна визначити за формулою

$$\phi = \arcsin\left(\frac{B}{A}\right), \quad (2.27)$$

Розміри A та B показано на рис. 2.13.

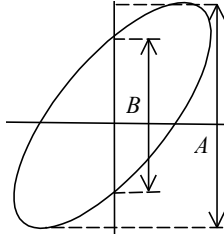


Рис. 1.10

5. Дослідити схемні елементи в імпульсному режимі, склавши схему (рис. 1.11).

Вмикаючи по черзі опір R і індуктивність L , подавати на них від генератора напругу пилоподібної, а потім прямокутної форми. Напруга, пропорційна струму, формується на опорі 10 Ом , ввімкненому послідовно з досліджуванним елементом. Спостерігати і зарисувати осцилограми напруги і струму у схемному елементі.

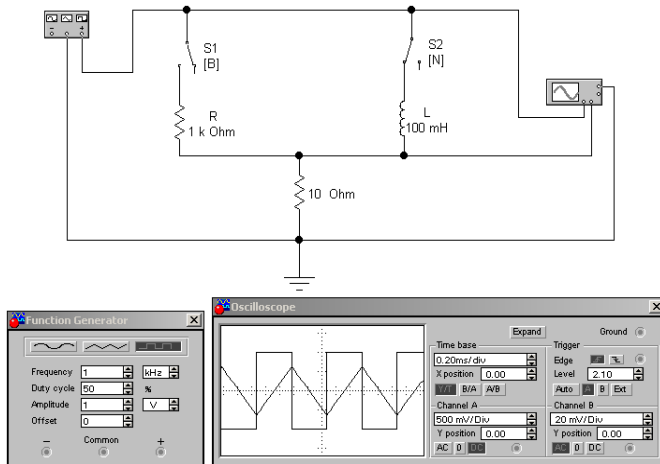


Рис. 1.11

6. Дослідити відмінність між елементом індуктивності і моделлю котушки у вигляді послідовного з'єднання індуктивності 100 мГн і опору 100 Ом . Для цього у схемах, зображених на рис. 1.7. і 1.8, замінити індуктивність L на

модель котушки і повторити досліди п.п. 2 і 4. Порівняти частотні характеристики повного опору елемента індуктивності і котушки, а також зсуви фаз між напругою і струмом.

7. Пояснити за допомогою елементних рівнянь результати моделювання, отримані у п.п. 1–5. Для цього вивести вирази для напруг в елементах опору, індуктивності та ємності, за умови, що гармонічний струм у схемному елементі

$$i = I_m \sin(\omega t).$$

Знайти амплітуду напруги, а також зсув фаз між напругою та струмом у кожному з елементів.

Вивести вирази для повного опору кожного зі схемних елементів як функцію частоти і параметра елемента. З'ясувати, чи описують ці вирази частотні залежності, отримані за допомогою моделювання експериментально.

За допомогою елементних рівнянь пояснити осцилограми, отримані у п. 5 в імпульсному режимі.

1.6.2. Фізичні закони електричних кіл

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- закону Кірхгофа для струмів;
- закону Кірхгофа для напруг;
- законів неперервності для індуктивності й ємності.

1. Дослідити виконання закону Кірхгофа для струмів, склавши схему, показану на рис. 1.12. Варіанти параметрів схеми наведено у табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Варіант	E1, В	E2, В	R1, кОм	R2, кОм	R3, кОм	R4, кОм	R5, кОм	R6, кОм
1	6	10	1	2	3	4	5	1
2	10	6	2	3	4	5	1	2
3	6	12	1	2	5	6	7	3
4	12	6	1	2	6	7	8	4
5	12	24	1	2	7	8	9	5
6	24	12	2	3	6	8	9	5
7	12	12	2	3	5	7	8	4
8	24	24	2	3	4	6	7	3

Замкнути перемикачем S3 діод VD1, утворивши лінійне коло. Перевірити виконання закону Кірхгофа для струмів у лінійному колі. Для цього виміряти струми в кожній вітці схеми, звівши виміряні величини у таблицю. Записати рівняння за законом Кірхгофа для струмів у різних перерізах схеми, підставити у них виміряні значення струмів із врахуванням їх напрямків. Переконатися, чи виконується закон Кірхгофа для струмів у лінійних колах. Нагадаємо, що від'ємний полюс приладів на схемі помічено жирною лінією.

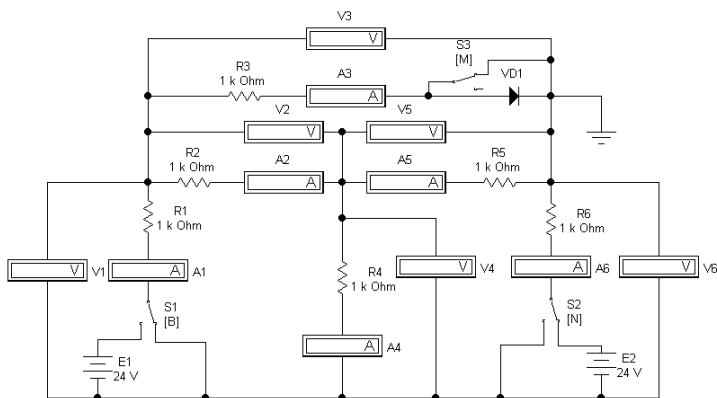


Рис. 1.12

2. Перевірити виконання закону Кірхгофа для напруг у лінійному колі. Для цього виміряти напруги на кожній вітці схеми, звівши виміряні величини у таблицю. Записати рівняння за законом Кірхгофа для напруг у різних контурах схеми, підставити в них виміряні значення напруг із врахуванням їх напрямків. Переконатися, чи виконується закон Кірхгофа для напруг у лінійних колах.

3. Розімкнути перемикачем S3 діод VD1, утворивши нелінійне коло. Повторити виміри і розрахунки п.п. 1, 2. Зробити висновок щодо виконання законів Кірхгофа у нелінійному колі.

4. Дослідити дію закону неперервності для ємності, склавши схему, показану на рис. 1.13. У цій схемі реле P, що керується напругою від генератора прямокутних імпульсів, замикає і розмикає опір R2. При кожному перемиканні виникає перехідний процес, у якому змінюються струми і напруги в елементах схеми. Дослідити напруги на опорі R2 (вузол a) і ємності C (вузол b), а також струм в ємності, зарисувавши їх осцилограми. (Напруга, пропорційна струмові, формується джерелом напруги E2, керованим струмом ємності з передаточним опором 1 Ом.) Переконатися, що напруга на ємності змінюється у часі неперервно без стрибків, тоді як струм в ємності, а також струми і напруга в резистивних опорах можуть змінюватись стрибкоподібно.

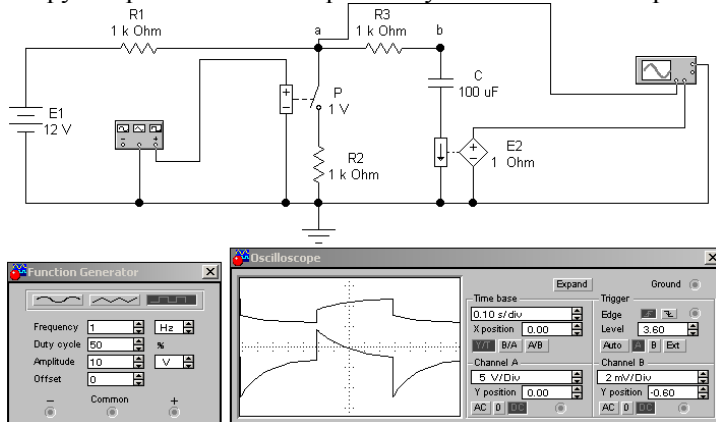


Рис. 1.13

5. Дослідити дію закону неперервності для індуктивності, склавши схему, показану на рис. 1.14.

У цій схемі реле P, що керується напругою від генератора прямо кутних імпульсів, замикає і розмикає опір R2. При цьому змінюється стрибком опір у колі індуктивності, що призводить до перехідного процесу, в якому змінюються струм і напруга в індуктивності. Дослідити, як змінюються в часі напруга і струм в індуктивності, зарисувавши їх осцилограми. Переконатися, що струм в індуктивності змінюється в часі неперервно без стрибків, тоді як напруга на індуктивності може змінюватись стрибкоподібно.

6. Виходячи з елементних рівнянь і законів Кірхгофа, пояснити хід перехідних процесів у схемах, показану на рис. 1.13 і 1.14.

Розрахувати усталені величини напруги на ємності у схемі на рис. 1.13 і струму в індуктивності у схемі на рис. 1.14 після кожного перемикання контактів реле. Параметри елементів задано на схемах.

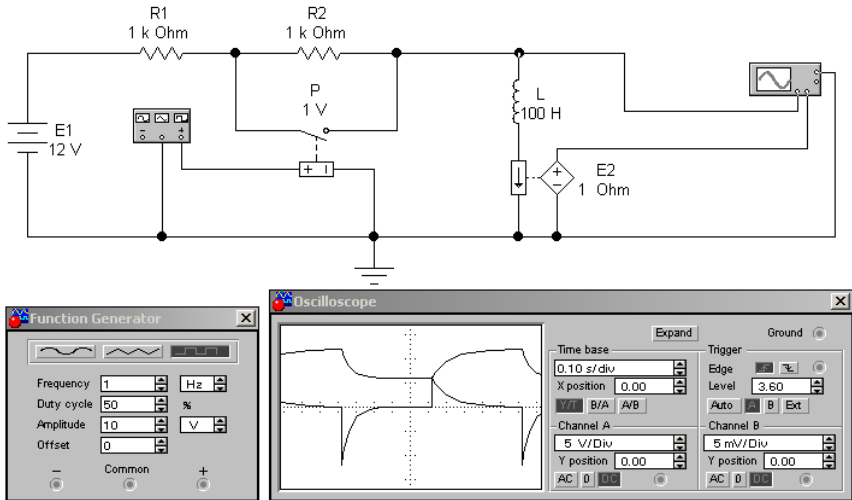


Рис. 1.14

1.6.3. Фізичні властивості електричних кіл

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- властивостей лінійних і нелінійних електромагнітних кіл;
- принципу накладання (суперпозиції) і умов, за яких цей принцип виконується;
- проявів інерційності електромагнітних кіл у режимі гармонічних коливань та в імпульсному режимі, а також умов, за яких можна знехтувати інерційністю кола.

1. Дослідити властивості лінійного кола, склавши схему, показану на рис. 2.15. Перемикачем $S3$ замкнути діод $VD1$ (нелінійний елемент), утворивши лінійне неінерційне коло. Вимкнути перемикачем $S2$ джерело напруги $E2$ і ввімкнути перемикачем $S1$ джерело напруги $E1$. Змінюючи напругу джерела $E1$ від 0 (нуля) до 10 В через 2 В, зняти і побудувати графіки залежностей струмів і напруг в елементах схеми від напруги джерела $E1$. Переконатися, що у лінійному колі всі струми і напруги лінійно залежать від напруги джерела.

2. Дослідити виконання принципу суперпозиції. Ввімкнути джерело $E1$ і вимкнути джерело $E2$ у схемі (див. рис. 1.12). Виміряти струми і напруги всіх елементів схеми, записавши показання приладів. Повторити виміри при вимкнутому джерелі $E1$ і ввімкнутому джерелі $E2$, а також при ввімкнутих обох джерелах. Результати вимірів звести у таблицю за таким зразком:

Елемент схеми	На- пруга, В	Струм, мА	На- пруга, В	Струм, мА	На- пруга, В	Струм, мА	Перевірка принципу накладання
E1	24	-12,01	0	5,99	24	-6,02	$-12,01 + 5,99 =$ $= -6,02$ мА
E2	0	5,99	24	-12,01	24	-6,02	$-12,01 + 5,99 =$ $= -6,02$ мА
R1		-12,01		5,99		-6,02	$-12,01 + 5,99 =$ $= -6,02$ мА
R2		5,99		0		5,99	$5,99 + 0 =$ $= 5,99$ мА
...

Перевірка принципу суперпозиції полягає у порівнянні струмів і напруг, викликаних дією обох джерел, і сум цих струмів і напруг в елементах схеми, викликаних дією кожного джерела окремо. При додаванні струмів і напруг в елементах потрібно враховувати їх напрямки. Зауважимо, що від'ємний полюс у вольтметрів і амперметрів на схемі, показаній на рис. 2.15, позначено товстішою лінією.

Увімкнути діод VD1, розімкнувши перемикач S3 у схемі, показаній на рис. 2.15. Перевірити, чи виконується принцип суперпозиції у нелінійному колі. З цією метою повторити виміри як у попередньому досліді.

3. Дослідити властивості лінійних інерційних кіл у режимі гармонічних коливань, склавши схему, показану на рис. 1.15.

Подати від генератора гармонічну напругу з амплітудою 10 В і частотою 1 кГц. Перемикачем S1 вимкнути діод VD1, утворивши лінійне інерційне коло. Експериментально довести, що у лінійному колі при гармонічній дії встановлюється режим гармонічних коливань, коли всі струми і напруги

змінюються у часі за гармонічним законом. Для цього спостерігати і зарисувати осцилограми напруг на елементах схеми.

Дослідити залежність амплітуди напруг на елементах схеми від амплітуди напруги джерела. Змінюючи амплітуду напруги джерела від 0 до 10 В через 2 В, зняти і побудувати графіки залежностей амплітуд напруг і струмів в елементах схеми від амплітуди напруги генератора.

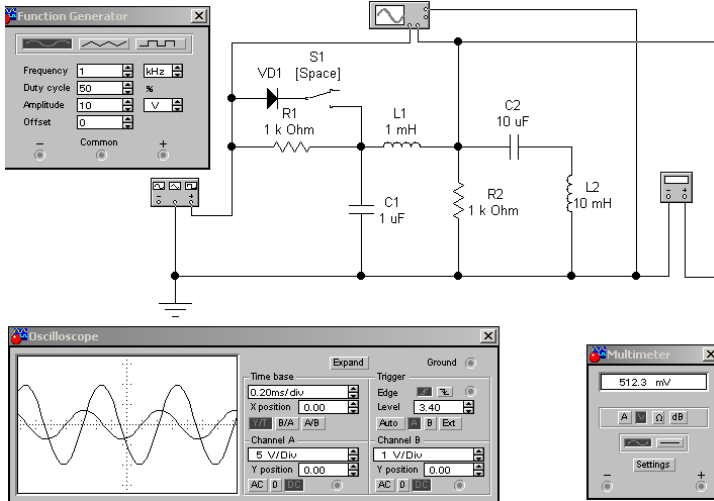


Рис. 1.15

Замкнути перемикач S1, утворивши нелінійне коло з діодом VD1. Повторити попередні дослід п. 3, порівняти отримані результати і зробити висновки щодо властивостей лінійних і нелінійних кіл у режимі гармонічних коливань.

4. Дослідити прояви інерційності в електромагнітних колах у режимі гармонічних коливань, склавши схему, показану на рис. 2.19. Встановити частоту генератора 1 кГц, амплітуду 1 В. Інерційність у режимі гармонічних коливань проявляється у появі фазових зсувів між напругами і струмами. Почергово підключаючи перемикачами S1, S2, S3 ємність C1, індуктивність L1, опір R2 у схемі, показаній на рис. 1.16, зняти осцилограми вхідної та вихідної напруг, за якими визначити, яке з утворених кіл є інерційне, а яке — неінерційне.

Зменшити частоту генератора до 100 Гц і ввімкнути ємність C1. Спостерігати, як зміниться зсув фаз при зменшенні частоти (збільшенні періоду коливань). Зробити висновок щодо проявів інерційності за умови збільшення тривалості коливань.

5. Дослідити прояви інерційності в електромагнітних колах у режимі імпульсних коливань. Повторити виміри п. 4, перемкнувши генератор у схемі, показаній на рис. 1.16, у режим генерування прямокутних імпульсів із частотою 1 кГц і амплітудою 1 В. Зарисувати осцилограми вихідних імпульсів напруги. За отриманими осцилограмами зробити висновки щодо інерційності досліджуваних схем.

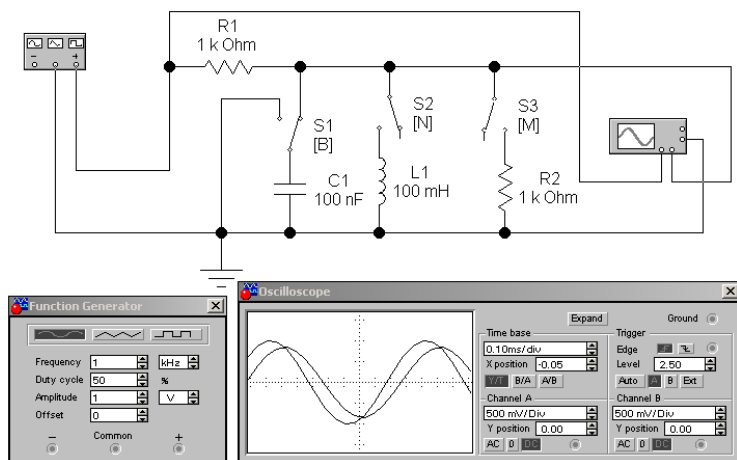


Рис. 1.16

Скласти схему, що показана на рис. 1.17. Генератор перемкнути у режим генерування прямокутних імпульсів із частотою 1 кГц і амплітудою 1 В. Перемикаючи ключем S1 індуктивність та ємність, зняти осцилограми вхідної та вихідної напруг у схемі, показаній на рис. 2.20. Зробити висновки щодо інерційності утворених кіл.

Зменшити частоту імпульсів до 10 Гц (період 0,1 с). Спостерігати і зарисувати осцилограми вихідних імпульсів у схемі на рис. 1.17, порівнявши їх із такими самими імпульсами за частоти 1 кГц. Зробити висновок щодо проявів інерційності за умови збільшення тривалості дії вхідних імпульсів напруги.

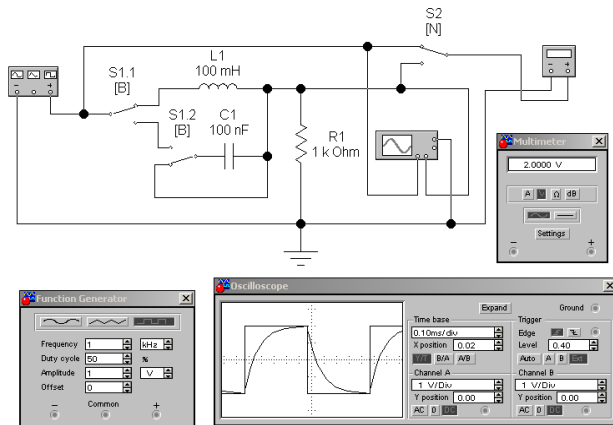


Рис. 1.17

Скласти схему, показану на рис. 1.18. Перемикаючи ключ S1, зняти осцилограми вхідної та вихідної напруг в утворених схемах. За отриманими осцилограмами зробити висновки щодо інерційності цих схем.

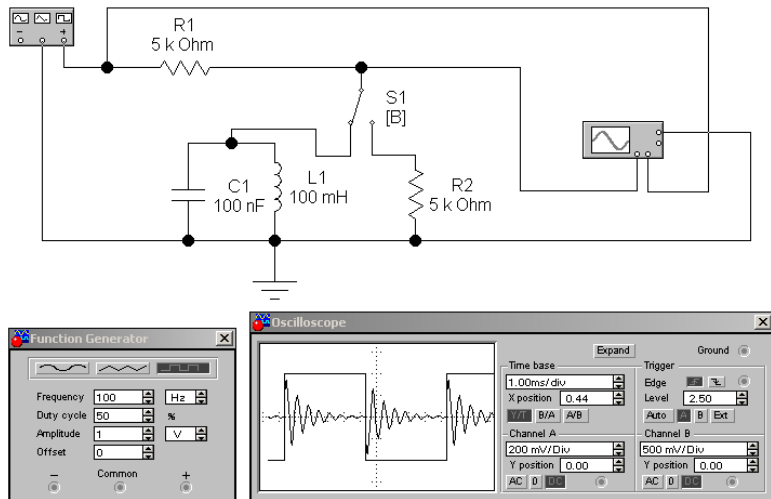


Рис. 1.18

6. Пояснити, за якими ознаками можна експериментально визначити лінійне коло чи нелінійне, як проявляється інерційність електромагнітних кіл? За якими ознаками можна експериментально визначити інерційність електромагнітного кола?

1.7. Підсумки та самоконтроль

Теорія кіл як наукова дисципліна оперує певними поняттями і спирається на певні фізичні закони. У цьому розділі вводяться основні поняття теорії кіл — такі, як електромагнітне коло і його схема заміщення, компонент кола і схемний елемент, вітка, контур, переріз схеми, двополюсник і багатополіусник. Встановлюються кількісні співвідношення між струмами і напругами схеми за допомогою елементних рівнянь і законів Кірхгофа. Проведено класифікацію електромагнітних кіл за ознаками лінійності, інерційності, зосередженості, стаціонарності. Оскільки всі положення теорії кіл випливають із законів Кірхгофа й елементних рівнянь, як із аксіом, глибоке і творче розуміння цих законів є необхідним для подальшого вивчення теорії кіл. Важливо також розуміти, як співвідносяться теоретична модель і реальний об'єкт, бо головним призначенням інженера є створення реально діючої апаратури за її теоретичною моделлю — схемою. Досягнення такого розуміння — мета вивчення цього розділу.

Поглибити знання з тематики цього розділу можна за допомогою літератури [2, гл. 1, 2], [3, гл. 1], [4, гл. 3], [6, гл. 1], [8, гл. 1, 3], [9, гл. 1], [11, гл. 1], [12, гл. 2]. Проконтролювати засвоєння матеріалу допоможуть відповіді на поставлені питання.

- Що таке електричне коло і його схема заміщення, компонент кола і схемний елемент?
- Які схемні елементи є активними і пасивними, реактивними і резистивними?
- Що таке вузол, вітка, контур та переріз схеми, вхід та вихід, двополюсник і багатополіусник?
- Чим відрізняються схема заміщення і принципова електрична схема?
- Як пов'язані між собою електричні заряд, струм, напруга і потужність? У яких одиницях вони вимірюються?
- Що таке елементне рівняння? Запишіть елементні рівняння опору, ємності, індуктивності, взаємної індуктивності, незалежних і залежних джерел напруги і струму.
- У чому полягає ідеальність схемних елементів?

- Які параметри компонентів кола є основними, а які – паразитними? Як реальні компоненти моделюються схемними елементами?
- Сформулюйте закони Кірхгофа для струмів і напруг. Для якої сукупності віток схеми записуються рівняння за кожним із цих законів?
- Яка система рівнянь схеми є повною? З яких рівнянь вона складається?
- Що таке принцип дуальності і яке його значення в теорії кіл? Які величини й поняття є дуальними?
- Які кола є лінійними і нелінійними? Які визначальні особливості мають лінійні кола?
- Сформулюйте принцип накладення (суперпозиції).
- Які кола вважаються інерційними і неінерційними, зосередженими, розподіленими, параметричними?
- Назвіть критерії зосередженості електромагнітного кола.

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

2.1. Схеми заміщення та рівняння лінійних електронних кіл

2.1.1. Повна система рівнянь електронної схеми

Інерційність електромагнітних кіл зумовлена процесами накопичування енергії в електричному та магнітному полях. Якщо інерційність не є істотною в даному режимі роботи кола, можна знехтувати ємностями й індуктивностями і, змодельовати коло за схемою, що складена тільки з резистивних елементів. Резистивними схемами моделюються також кола в режимі сталих струмів, в яких інерційність аж ніяк не виявляється.

Невід'ємною частиною аналізу ЕМК є побудова математичної моделі, тобто кількісного опису залежностей між струмами і напругами, що характеризують електромагнітні процеси у колі. Математична модель може мати вигляд *повної системи рівнянь*, що одержуються таким чином: на схемі довільно проставляються стрілки умовних додатних напрямів струмів та напруг і складаються рівняння за ЗКС та ЗКН так, щоб вони були незалежними одне від одного, а також рівняння за законом Ома для опорів. Загальна кількість рівнянь повної системи повинна дорівнювати числу невідомих струмів і напруг.

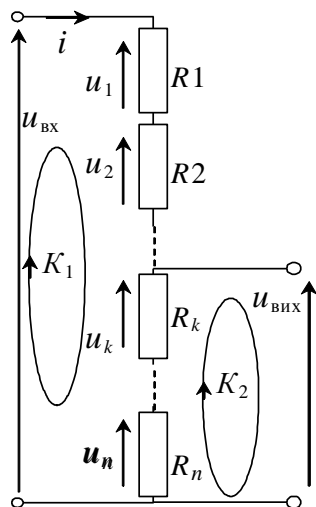


Рис. 2.1

Приклад 2.1. Розрахувати струми, напруги, потужності елементів *подільника напруги* (рис. 2.1) при заданій напрузі u_{BX} , а також коефіцієнт передачі напруги $K_U = u_{\text{ВХ}} / u_{\text{BX}}$.

Розв'язання. Поставивши стрілки струму та напруг, записуємо рівняння за ЗКН для контура K_1 : $u_{\text{BX}} - u_1 - u_2 - \dots - u_n = 0$, за законом Ома: $u_1 = R_1 i$, ..., $u_n = R_n i$. Одержуємо повну систему рівнянь, з якої знаходимо

$$u_{\text{BX}} = \sum_{j=1}^n u_j = R i, \quad (2.1)$$

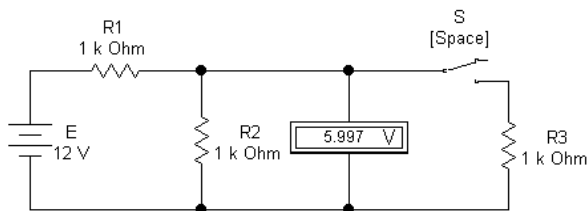
де $R = \sum_{j=1}^n R_j$, звідки $i = u_{\text{вх}}/R$. Далі одержуємо $u_j = R_j i$, $P_j = R_j i^2$, $u_{\text{вих}} = \sum_{j=k}^n u_j = i \sum_{j=k}^n R_j$ (див. контур K_2), а також

$$K_U = \frac{u_{\text{вих}}}{u_{\text{вх}}} = \sum_{j=k}^n R_j / \sum_{j=1}^n R_j. \quad (2.2)$$

В окремому випадку, коли подільник складається із двох опорів, маємо

$$K_U = R_2 / (R_1 + R_2). \quad (2.3)$$

КМ 2.1. Скласти у середовищі Electronics Workbench схему, що моделює подільник напруги:



Розрахувати за формулою (2.3) коефіцієнт передачі напруги за величинами опорів R_1 і R_2 , задавши довільно кілька значень величин цих опорів. Визначити коефіцієнт передачі напруги, вимірявши напругу на вході і виході подільника при розімкненому перемикачі S . Порівняти розраховане і виміряне значення коефіцієнта передачі напруги. Дослідити вплив опору навантаження R_3 на виході подільника на значення коефіцієнта передачі напруги, підімкнути його ключем S . Пояснити отримані результати.

Приклад 2.2. Розрахувати струми, напруги та потужності в елементах схеми *подільника струму* (див. рис. 2.2) при заданому вхідному струмі $i_{\text{вх}}$, а також коефіцієнт передачі струму $K_i = i_{\text{вих}}/i_{\text{вх}}$.

Розв'язання. Проставляємо стрілки струмів та напруги і записуємо рівняння за ЗКС для перерізу S_1 : $i_{\text{вх}} - i_1 - \dots - i_n = 0$ і за законом Ома $i_1 = G_1 u$, ..., $i_n = G_n u$, звідки знаходимо

$$i_{\text{BX}} = \sum_{j=1}^n i_j = Gu, \quad (2.4)$$

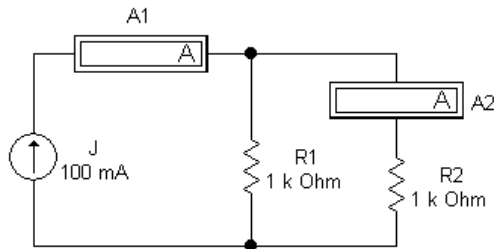
де $G = \sum_{j=1}^n G_j$. Далі одержуємо $u = i_{\text{BX}}/G$, $i_j = G_j u$, $P_j = G_j u^2$, $i_{\text{ВНХ}} = \sum_{j=k}^n i_j = u \sum_{j=k}^n G_j$ (див. переріз S_2),

$$K_i = \frac{i_{\text{ВНХ}}}{i_{\text{BX}}} = \sum_{j=k}^n G_j / \sum_{j=1}^n G_j. \quad (2.5)$$

У випадку, коли подільник складений із двох елементів,

$$K_i = G_2 / (G_1 + G_2) = R_1 / (R_1 + R_2). \quad (2.6)$$

КМ 2.2. Скласти у середовищі Electronics Workbench таку схему, що моделює подільник струму:



Розрахувати за формулою (2.6) коефіцієнт передачі струму за значеннями опорів R_1 і R_2 , задавши довільно кілька значень величин цих опорів. Визначити коефіцієнт передачі струму, вимірявши струми на вході і виході подільника. Порівняти розраховане і виміряне значення коефіцієнта передачі струму. Пояснити отримані результати.

Зауважимо, що схеми (рис. 2.1 і 2.2) дуальні, бо описуються дуальними системами рівнянь. Тому ми могли б знайти вирази (2.4)–(2.6) безпосередньо з (2.1) і (2.3), застосувавши принцип дуальності.

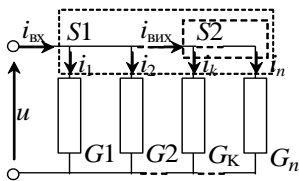


Рис. 2.2

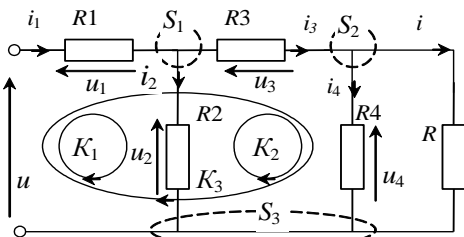


Рис. 2.3

Приклад 2.3. Скласти повну систему рівнянь схеми атенюатора (див. рис. 2.3).

Розв'язання. Поставивши стрілки струмів і напруг, з'ясуємо, що схема має 5 невідомих струмів і 4 напруги, загалом 9 величин. Отже, повна система має складатися з дев'яти рівнянь. Запишемо рівняння за ЗКС для перерізів S_1, S_2 :

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0, \quad i_3 - i_4 - i = 0. \quad (2.7)$$

Рівняння для перерізу S_3 : $i_1 - i_2 - i_4 - i = 0$ є сумою перших двох, тобто є залежними, і його слід відкинути. Складаємо рівняння за ЗКН для контурів K_1, K_2 :

$$u - u_1 - u_2 = 0, \quad u_2 - u_3 - u_4 = 0. \quad (2.8)$$

Рівняння для контура K_3 : $u - u_1 - u_3 - u_4 = 0$ також є залежним. Решту рівнянь складаємо за законом Ома:

$$i_1 = G_1 u_1, \quad \dots, \quad i_n = G_n u_n, \quad i = G u. \quad (2.9)$$

Усього одержали 9 рівнянь, тобто потрібну кількість.

Розглянуті приклади показали, що навіть у простих схемах повні системи рівнянь досить громіздкі. Далі розглядатимуться методи складання більш простіших систем рівнянь електричних схем. Зрештою виникли такі питання:

Як вибрати перерізи та контури схеми, щоб рівняння, складені за законами Кірхгофа, були незалежними?

Чи можливо за допомогою законів Кірхгофа, Ома скласти для будь-якої схеми достатню кількість рівнянь?

Відповіді на питання надано у п. 2.2.

2.1.2. Еквівалентні перетворення електронних схем

На розглянутих прикладах 2.1–2.2 можна проілюструвати одне з основних понять теорії кіл – *еквівалентність електронних схем*: *n*-полюсні підсхеми (частини схеми) називаються еквівалентними, якщо заміна однієї на іншу не змінює режиму решти схеми.

Згідно з цим визначенням, двополюсник у вигляді послідовного з'єднання опорів еквівалентний одному опору, рівному їх сумі, що впливає з (2.1). Справді, за такої заміни струм джерела не зміниться. Аналогічно з (2.4) впливає, що паралельне з'єднання резистивних елементів еквівалентне одному елементові із сумарною провідністю. Інші види еквівалентних схем наведені у табл. 3.1, а їх еквівалентність доведена нижче.

КМ 2.3. Виконати завдання 1 з підрозділу 2.5.1.

Розглянемо схеми заміщення джерел. Напруга реального джерела залежить від струму, а саме: зі збільшенням струму напруга зменшується. Вольтамперна характеристика джерела описується рівнянням

$$u = E - R_{\text{вн}} i. \quad (2.10)$$

Таким самим рівнянням описується схема (рис. 2.4, а). Тому реальні джерела моделюються схемою заміщення з ідеальним джерелом напруги E та внутрішнім опором $R_{\text{вн}}$.

Якщо привести це рівняння до вигляду

$$i = J - G_{\text{вн}} u, \quad (2.11)$$

де

$$G_{\text{вн}} = 1/R_{\text{вн}}, \quad J = G_{\text{вн}} E,$$

можна скласти іншу схему реального джерела, що містить ідеальне джерело струму (рис. 2.4, б). Еквівалентність схем джерел впливає з еквівалентності рівнянь (2.10) і (2.11).

КМ 2.4. Виконати завдання 3 з підрозділу 2.5.1.

Приклад 2.4. До джерела з параметрами E та $R_{\text{вн}}$ (рис. 2.5) ввімкнено навантаження з опором R . Яким має бути опір навантаження, щоб одержати в ньому максимальну потужність? Знайти залежність потужності навантаження та коефіцієнт корисної дії (ККД) від опору R .

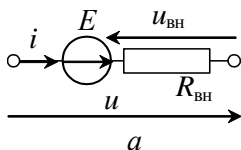


Рис. 2.4

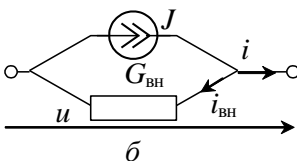


Рис 2.5

Розв'язання. Потужність у навантаженні

$$P = Ri^2 = E^2 R / (R_{\text{вн}} + R)^2. \quad (2.12)$$

Взявши похідну від P по R і прирівнявши її до нуля, знаходимо, що при $R = R_{\text{вн}}$ одержують *максимальну потужність джерела*

$$P_{\text{max}} = E^2 / 4R_{\text{вн}}. \quad (2.13)$$

Добір опору навантаження з метою одержання максимальної потужності називається *узгодженням навантаження із джерелом*. Як бачимо, умова узгодження — рівність опорів джерела і навантаження, причому максимально можлива потужність джерела залежить від його параметрів згідно з (2.13). ККД визначається як

$$\eta = P / (P + P_{\text{вн}}) = R / (R + R_{\text{вн}}), \quad (2.14)$$

де $P_{\text{вн}} = R_{\text{вн}} i^2$ — потужність втрат у джерелі. На рис. 2.6 побудовано залежності P/P_{max} та η від $R/R_{\text{вн}}$ відповідно до (2.12) та (2.14), з яких видно, що режим кола при $R/R_{\text{вн}} < 1$ непридатний з огляду як на низьку потужність, так і на малий ККД. При $R/R_{\text{вн}} = 1$ хоч і одержують максимальну потужність, але ККД дорівнює лише 0,5, тобто половина енергії втрачається даремно, що неприпустимо у разі потужних джерел. Тому найоптимальніші режими отримують при $R/R_{\text{вн}} > 1$, коли потужність зі зростанням R зменшується ще незначно, а ККД помітно зростає. Це слід враховувати при налаштуванні різних пристроїв.

КМ 2.5. Виконати завдання 2 з підрозділу 2.5.3.

Насамкінець виявимо співвідношення між реальними та ідеальними джерелами. Для схеми (див. рис. 2.5) маємо $u = Ri = ER / (R + R_{\text{вн}})$. Якщо $R_{\text{вн}} \ll R$ то $u \approx E$. Отже, якщо внутрішній опір джерела доволі малий, то напруга практично не залежить від струму, що притаманне ідеальному джерелу напруги. Далі, оскільки $i = E / (R + R_{\text{вн}})$, при $R \ll R_{\text{вн}}$ $i \approx E / R_{\text{вн}} = J$, тоб-

то струм не залежить від опору навантаження, що характерно для ідеального джерела струму. Таким чином, ідеальне джерело напруги можна розглядати як джерело з нескінченно малим, а джерело струму — з нескінченно великим внутрішніми опором.

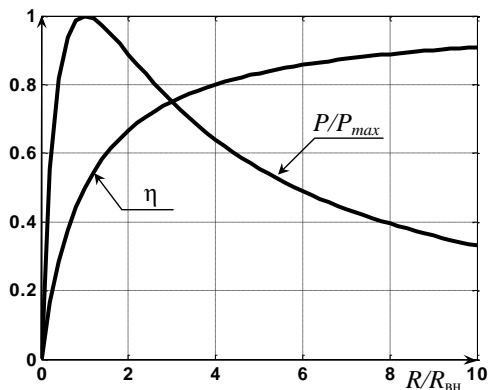


Рис. 2.6

КМ 2.6. Виконати завдання 2, 3 з підрозділу 2.5.3.

Зазвичай еквівалентні перетворення схем проводять з метою їх спрощення. Загальна методика знаходження еквівалентних схем така. Складаються системи рівнянь обох схем і доводиться еквівалентність їх рівнянь відносно зовнішніх струмів і напруг. Застосуємо цю методику для доведення еквівалентності дуже поширеного *перетворення «трикутник — зірка»*. Складемо повну систему рівнянь схеми «трикутник» (рис. 2.7, а):

$$\begin{aligned}
 i_1 &= i_{12} + i_{13}, & i_2 &= i_{12} + i_{23}, \\
 i_3 &= i_1 - i_2, & i_{12} &= u_{12}/R_{12}, \\
 i_{13} &= u_{13}/R_{13}, & i_{23} &= u_{23}/R_{23}, \\
 u_{13} - u_{12} + u_{23} &= 0.
 \end{aligned}$$

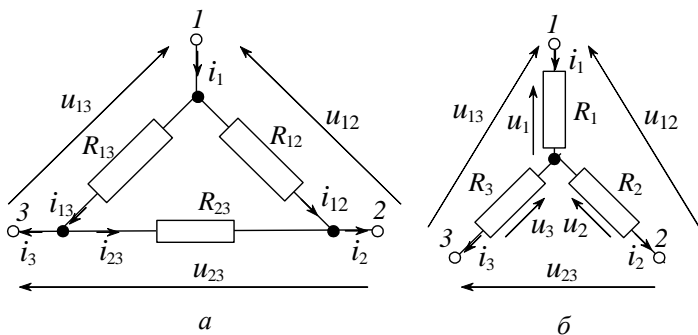


Рис. 2.7

Вилучивши внутрішні струми i_{12} , i_{13} , i_{23} , встановимо залежності між зовнішніми струмами та напругами:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{1}{R_{12}} u_{12} + \frac{1}{R_{13}} u_{13}, \\
 i_2 &= \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} \right) u_{12} - \frac{1}{R_{23}} u_{13}, \\
 u_{12} &= \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_1 + \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_2, \\
 u_{13} &= \left(\frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} + \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \right) i_1 - \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} i_2. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Складемо тепер рівняння для схеми «зірка» (рис. 2.7, б):

$$\begin{aligned}
 i_1 - i_2 - i_3 &= 0, \quad u_{12} - u_1 - u_2 = 0, \\
 u_{13} - u_1 - u_3 &= 0, \quad u_{23} + u_3 - u_2 = 0, \\
 u_1 &= R_1 i_1, \quad u_2 = R_2 i_2, \quad u_3 = R_3 i_3.
 \end{aligned}$$

Вилучивши внутрішні напруги u_1, u_2, u_3 , встановимо залежності між зовнішніми струмами та напругами:

$$\begin{aligned}
u_{12} &= R_1 i_1 + R_2 i_2, \\
u_{13} &= (R_1 + R_3) i_1 - R_3 i_2, \\
i_1 &= \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_{12} + \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_{13}, \\
i_2 &= \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_{12} - \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} u_{13}. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Порівнюючи рівняння (2.15) і (2.16), знаходимо, що триполюсники «трикутник» і «зірка» еквівалентні, якщо (див. табл. 2.1, рядок 4):

$$\begin{aligned}
R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, & R_1 &= \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \\
R_{13} &= R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}, & R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \\
R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}, & R_3 &= \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.
\end{aligned}$$

КМ 2.7. Виконати завдання 2 з підрозділу 2.5.1.

Спростити аналіз електричних схем також можливо, застосовуючи метод накладання. Принцип накладання був сформульований у п. 2.5.1. При застосуванні принципу накладання до аналізу електричних схем вимикають (гасять) всі джерела, залишаючи по черзі лише одне, і знаходять часткові реакції на дію кожного джерела окремо. Потім додають їх з урахуванням напрямків змінних реакції.

Що означає погасити джерело? Дія джерела напруги визначається напругою, яка не залежить від струму. Отже, щоб погасити джерело напруги, треба його напругу прирівняти до нуля при будь-якому струмі, тобто замінити джерело ідеальним провідником. Джерело ж струму гасять шляхом відключення від схеми, коли струм дорівнює нулю за будь-якої напруги.

Таблиця 2.1

№ з/п	Вихідна схема	Еквівалентна схема	Умови еквівалентності
1			$R = \sum_{k=1}^n R_k$
2			$G = \sum_{k=1}^n G_k$
3			$J = GE,$ $G = \frac{1}{R}.$
4			$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R}, R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3},$ $R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R}, R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1},$ $R_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R}, R_{13} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2},$ $R = R_{12} + R_{23} + R_{13}.$
5			$E_c = U_x; J_c = i_k$ $R_c = \frac{U_x}{i_k}; G_c = \frac{1}{R_c}$

КМ 2.8. Виконати завдання 2 з підрозділу 2.6.3.

Приклад 2.5. Розрахувати струм i_3 у схемі, зображеній на рис. 2.8 а.

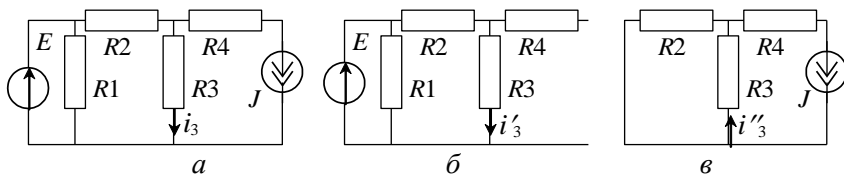


Рис. 2.8

Розв'язання. Вимкнувши джерело J , одержимо схему (рис. 2.8, б), в якій $i'_3 = E/(R_2 + R_3)$. Потім замінивши джерело E провідником, одержимо схему (рис. 2.8, в), в якій знаходимо $i''_3 = JR_2/(R_2 + R_3)$. Відповідно до принципу накладання $i_3 = i'_3 - i''_3$.

2.1.3. Теорема про еквівалентний генератор

Доведемо теорему про еквівалентний генератор: будь-який активний двополюсник можна еквівалентно замінити послідовним з'єднанням джерела напруги E_e та опору R_e (теорема Тевенена), або паралельним з'єднанням джерела струму J_e і провідності G_e (теорема Нортон).

На рис. 2.9, а показано активний двополюсник А, в якому виділено включені в нього джерела, пасивна частина П та вітка із зовнішнім навантаженням R_H . Замінімо зовнішню вітку джерелом струму i (рис. 2.9, б). При цьому режим активного двополюсника не зміниться. За принципом накладання напруга u є результатом дії всіх джерел. Реакцією на дію всіх джерел, крім i , є напруга холостого ходу u_x (рис. 2.9, в), а дія джерела i викликає напругу $u' = R_{вх} i$ (рис. 2.9, г), де $R_{вх}$ — вхідний опір пасивного двополюсника П. Отже, із врахуванням напрямків напруг u_x та u' за принципом накладання маємо

$$u = u_x - R_{вх} i. \quad (2.17)$$

Цьому рівнянню відповідає схема (рис. 2.9, д), де

$$E_e = u_x, \quad R_e = R_{вх}. \quad (2.18)$$

Таким чином, напруга E_e еквівалентного генератора дорівнює напрузі холостого ходу на виході активного двополюсника, а внутрішній опір R_e еквівалентного генератора дорівнює вхідному опору пасивного двополюсника, одержаного з активного двополюсника при гасінні його внутрішніх джерел.

Можна визначити R_e ще інакше. У режимі короткого замикання у схемі, зображеній на рис. 2.9 *д*, $u = 0, i = i_k$. Тоді, згідно з (2.17) і (2.18),

$$R_e = u_x / i_k.$$

Ми довели теорему Тевенена. Теорема Нортонa доводиться еквівалентною заміною джерела напруги E_e на джерело струму (див. рис. 2.9, *е*):

$$J_e = E_e / R_e = i_k, G_e = 1 / R_e = i_k / u_x.$$

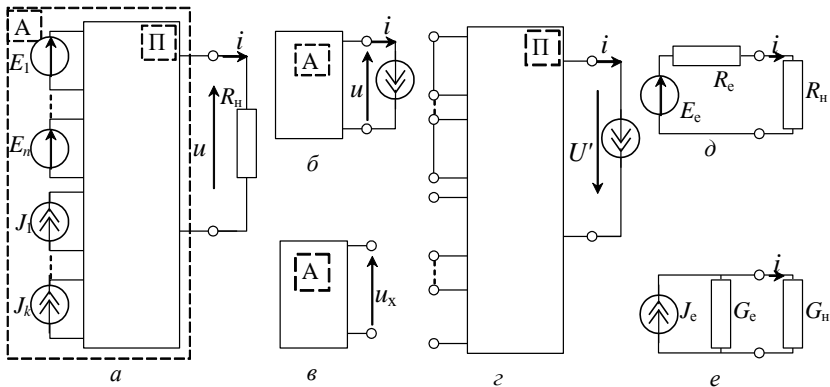


Рис. 2.9

Приклад 2.6. У колі (рис. 2.10) визначити струм через опір R_1 методом еквівалентного генератора. Числові значення елементів наведені на схемі: опір – кОм, струм – мА, напруга – В.

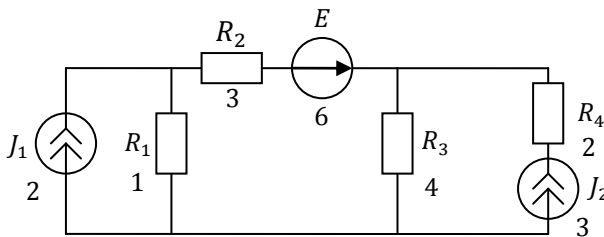


Рис. 2.10

Розв'язання

У колі (рис. 2.10) від'єднаємо гілку із опором R_1 (рис. 2.11).

За першим законом Кірхгофа (рис. 2.11)

$$I_3 = J_1 - J_2 = 2 + 3 = 5 \text{ мА.}$$

За законом Ома:

$$u_2 = J_1 R_2 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ В,}$$

$$u_3 = I_3 R_3 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ В.}$$

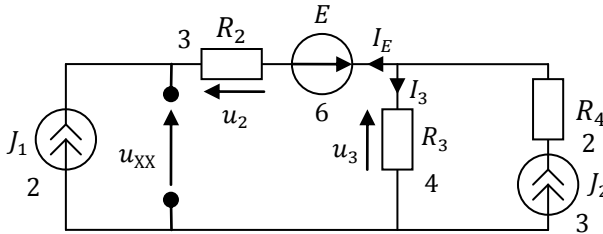


Рис. 2.11

За другим законом Кірхгофа

$$u_{XX} - u_2 + E - u_3 = 0.$$

Звідси визначимо напругу холостого ходу

$$u_{XX} = u_2 + u_3 - E = 6 + 20 - 6 = 20 \text{ В.}$$

У колі (рис. 2.11) замінимо джерела J_1, J_2 та E їх внутрішніми опорами, (рис. 2.12 а) і визначимо опір еквівалентного генератора відносно вузлів a та b

$$R_{\text{ЕГ}} = R_2 + R_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кОм.}$$

Представимо коло (рис. 2.11) відносно R_1 еквівалентним генератором (рис. 2.12 б) і визначимо струм

$$I_1 = \frac{E_{\text{ЕГ}}}{R_1 + R_{\text{ЕГ}}} = \frac{20}{1 + 7} = \frac{20}{8} = 2.5 \text{ мА.}$$

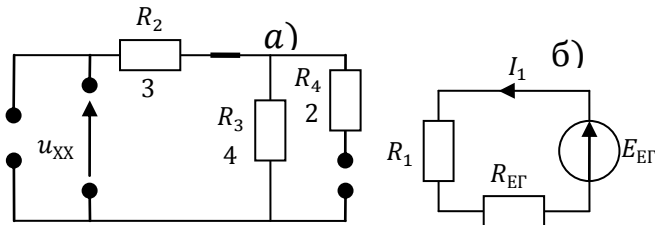


Рис. 2.12

2.2. Методи складання рівнянь електричних схем

2.2.1. Топологія електричних схем та закони Кірхгофа

На прикладах вище було показано, що не всі перерізи та контури схеми незалежні в тому розумінні, що не для всіх із них можна скласти незалежні рівняння за законами Кірхгофа. Як же відшукати у схемі незалежні перерізи та контури? Рівняння за законами Кірхгофа не залежать від виду елементів, а визначаються тільки способом з'єднання цих елементів, тобто співвідношеннями вузлів і віток схеми, інакше кажучи, *топологією схеми*. Топологію схеми зручно описувати за допомогою графів. *Граф схеми* зображується у вигляді точок — вершин і ліній — *ребер* графа. Ребрам можна приписувати напрямок, проставляючи стрілки. Такі напрямлені ребра називаються *дугами*, а граф — напрямленим. Зобразимо вузли схеми вершинами графа, а вітки — дугами, причому так, щоб напрямок дуги збігався з напрямком струму. На рис. 2.12, а показано граф схеми (див. рис. 2.14).

Підграф (частина графа), що складається з усіх вершин графа, з'єднаних дугами так, щоб не було жодного замкненого контуру, називають *деревом графа*. На рис. 2.13, б наведено одне з можливих дерев графа (рис. 2.13, а). Дуги дерева 4, 5, 6 показано суцільними лініями. Дуги, що не ввійшли у дерево, називають *хордами*. У нашому прикладі хорди 1, 2, 3 показано пунктирними.

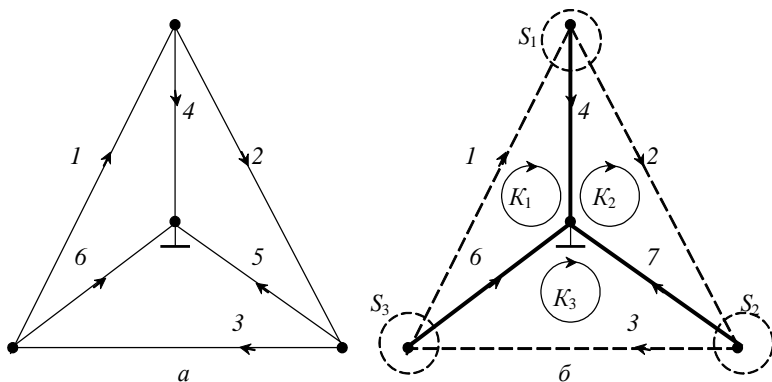


Рис. 2.11

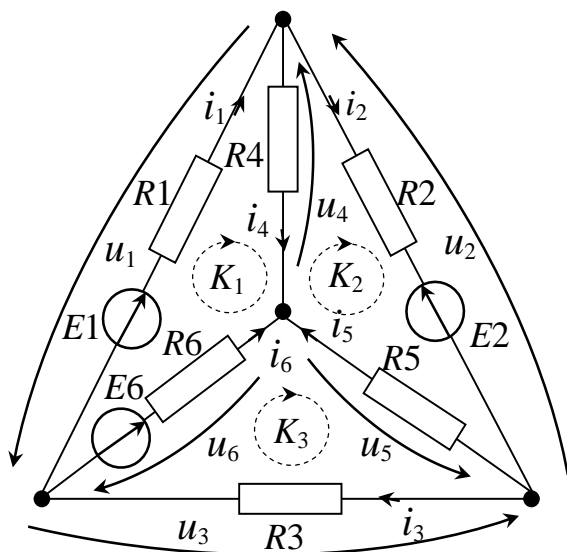


Рис. 2.14

Тепер розглянемо спосіб пошуку *незалежних перерізів* і *контурів* схеми. Очевидно, якщо переріз матиме хоча б одну вітку, що не входить в інші перерізи, такий переріз буде незалежним, бо його рівняння за ЗКС не можна вивести з рівнянь інших перерізів, у які не входить струм цієї вітки. Аналогічно незалежний контур має містити хоча б одну вітку, яка не входить до інших контурів. Користуючись цією ознакою незалежності та поділивши граф на дерево та хорди, можна відшукати незалежні перерізи та контури. Справді, оскільки дуги дерева не утворюють замкнених контурів, завжди можна провести переріз, котрий містив би, крім хорд, одну дугу дерева, яка не входить в інші перерізи (див. перерізи S_1, S_2, S_3 на рис. 2.12, б). Кожна хорда з дугами дерева утворює контур, у який не входять інші хорди. Тому контури K_1, K_2, K_3 на рис. 3.11, б є незалежними. Кількість незалежних перерізів дорівнює числу дуг дерева, а кількість незалежних контурів – числу хорд. Нехай схема має V вузлів та L віток. Тоді дерево матиме $(V - 1)$ дугу, а хорд буде $(L - V + 1)$. Отже, схема має $(V - 1)$ незалежний переріз, а $(L - V + 1)$ незалежний контур, тому можна скласти $(V - 1)$ рівняння за ЗКС та $(L - V + 1)$ рівняння за ЗКН, усього

L рівнянь. Ще можна скласти L елементних рівнянь віток за законом Ома, а загалом $2L$ рівнянь, що містять $2L$ невідомих: L струмів та L напруг віток. Таким чином, матимемо повну систему рівнянь. Отже, за допомогою законів Кірхгофа та елементних рівнянь можна скласти повну систему рівнянь для будь-якої схеми.

У більшості практичних задач незалежні перерізи та контури легко відшукати безпосередньо у схемі, якщо брати перерізи, що обіймають по одному з $(V - 1)$ вузлів, як показано на рис. 2.12, б. Останній вузол називають *базисним*. Незалежними контурами можна брати чарунки схеми, як контури K_1, K_2, K_3 на рис. 2.12, б.

Приклад 2.7. Скласти повну систему рівнянь схеми, поданої на рис. 2.13.

Розв'язання. Вибираємо незалежні перерізи, що обіймають вузли 1, 2, 3 (вузол 4 – базисний), та складаємо рівняння за ЗКС

$$i_1 - i_2 - i_4 = 0, \quad i_2 - i_3 - i_5 = 0, \quad i_3 - i_1 - i_6 = 0,$$

або

$$i_4 = i_1 - i_2, \quad i_5 = i_2 - i_3, \quad i_6 = i_3 - i_1. \quad (2.19)$$

Вибираємо незалежні контури — чарунки схеми K_1, K_2, K_3 та складаємо рівняння за ЗКН

$$-u_1 - u_4 + u_6 = 0, \quad -u_2 + u_4 - u_5 = 0, \quad -u_3 + u_5 - u_6 = 0,$$

або

$$u_1 = u_6 - u_4, \quad u_2 = u_4 - u_5, \quad u_3 = u_5 - u_6. \quad (2.20)$$

Записуємо рівняння віток:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 - E_1, & i_1 &= G_1 u_1 + J_1, \\ u_2 &= R_2 i_2 + E_2, & i_2 &= G_2 u_2 - J_2, \\ u_3 &= R_3 i_3, & i_3 &= G_3 u_3, \\ u_4 &= R_4 i_4, & i_4 &= G_4 u_4, \\ u_5 &= R_5 i_5, & i_5 &= G_5 u_5, \\ u_6 &= R_6 i_6 - E_6, & i_6 &= G_6 u_6 + J_6. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Рівняння (2.19) – (2.21) утворюють повну систему, оскільки вони незалежні і їх кількість (12) дорівнює числу невідомих (6 струмів + 6 напруг віток).

2.2.2. Метод контурних струмів

Зауважимо, що за допомогою рівнянь (2.19) частину струмів (i_4, i_5, i_6) можна виразити через інші струми (i_1, i_2, i_3), причому останні ніби замикаються кожен у своєму контурі. Так, струм i_1 протікає у вітці 1 і входить, згідно з (2.19), до складу струмів i_4, i_6 віток 4, 6, що разом із віткою 1 утворюють незалежний контур. Це приводить до поняття *контурних струмів*. Через контурні струми можна виразити всі струми схеми, а за допомогою елементних рівнянь – всі напруги. Отже, систему рівнянь схеми потрібно будувати так, щоб шуканими змінними були контурні струми. Таких рівнянь буде $L - V + 1$ замість $2L$ рівнянь повної системи. *Контурні рівняння* можна одержати шляхом виключення з повної системи всіх змінних, окрім контурних струмів. Поклавши $I_1 = i_1, I_2 = i_2, I_3 = i_3$, виключимо з першого рівняння (2.20) напруги за допомогою рівнянь (2.21) та виразивши струми віток через контурні струми, одержимо рівняння

$$E_1 - E_6 = (R_1 + R_4 + R_6)I_1 - R_4I_2 - R_6I_3.$$

Назвемо *задавальною напругою контура* алгебраїчну суму напруг джерел, що входять у даний контур, в якій доданки мають знак «плюс», якщо напрямки напруги джерела та контурного струму збігаються, і знак «мінус» – у противному разі. Суму опорів віток контура називають *власним опором* цього контуру, а опір вітки, що входить у кілька контурів, – *взаємним опором* цих контурів. Тепер звернемося до останнього рівняння. Як бачимо, ліва його частина – це задавальна напруга першого контуру, а права частина становить суму добутків власного опору першого контуру на його контурний струм та взаємних опорів на струми інших контурів, причому взаємні опори мають знак «плюс» чи «мінус» залежно від того, збігаються чи ні в них напрямки контурних струмів. У теорії кіл доводиться, що контурні рівняння завжди мають такий вигляд. Отже, для складання системи рівнянь за *методом контурних струмів* потрібно:

- в заданій схемі *визначити незалежні контури, наприклад чарунки, і в кожному контурі вибрати довільно, бажано однаково, напрямки контурних струмів;*
- *для кожного контуру скласти рівняння, одна частина якого являє собою задавальну напругу контуру, а друга – суму добутків власного опору на струм цього контуру і взаємних опорів на струми інших контурів, причому*

останні беруть зі знаком «плюс» або «мінус» залежно від того, збігаються чи ні напрямки контурних струмів у взаємних опорах.

Скориставшись цим правилом, складемо рівняння інших контурів схеми, показаної на рис. 2.14:

$$\begin{aligned} -E_2 &= -R_4 I_1 + (R_2 + R_4 + R_5) I_2 - R_5 I_3, \\ E_6 &= -R_6 I_1 - R_5 I_2 + (R_3 + R_5 + R_6) I_3. \end{aligned}$$

КМ 2.10. Виконати завдання 1 з підрозділу 2.5.2.



Розв'язання

Якщо напрямки протікання контурних струмів обрати за годинниковою стрілкою сформуємо (рис. 2.16) систему на основі МКС

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_I - R_2 I_{II} - R_3 I_{III} = 0; \\ -R_2 I_I + (R_2 + R_4) I_{II} - R_4 I_{III} = E_1; \\ -R_3 I_I - R_4 I_{II} + (R_3 + R_4) I_{III} = -E_2. \end{cases}$$

Підставимо числові значення

$$\begin{cases} 5I_I - 2I_{II} - I_{III} = 0; \\ -2I_I + 4I_{II} - 2I_{III} = 6; \\ -I_I - 2I_{II} + 3I_{III} = -1. \end{cases}$$

Визначники системи

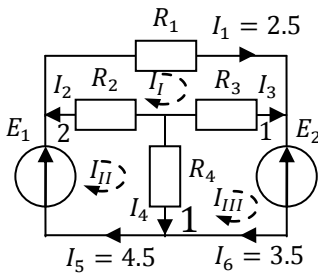
$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 5 \cdot (12 - 4) + 2(-6 - 2) - (4 + 4) = 40 - 16 - 8 = 16; \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 40; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 72;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 56.$$

За методом Крамера контурні струми

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{16} = 2.5 \text{ мА}; \quad I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{72}{16} = 4.5 \text{ мА}; \quad I_{III} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{56}{16} = 3.5 \text{ мА}.$$



Струми у гілках за першим законом Кірхгофа (рис. 2.16) визначаються

$$I_1 = I_I = 2.5 \text{ мА}, \quad I_5 = I_{II} = 4.5 \text{ мА},$$

$$I_6 = I_{III} = 3.5 \text{ мА},$$

$$I_4 = I_{II} - I_{III} = 4.5 - 3.5 = 1 \text{ мА};$$

$$I_2 = I_{II} - I_I = 4.5 - 2.5 = 2 \text{ мА};$$

$$I_3 = I_{III} - I_I = 3.5 - 2.5 = 1 \text{ мА}.$$

Розрахуємо баланс потужностей.

Рис. 2.16

Потужність споживачів

$$P_{\text{спож}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 2.5^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 = 23.5 \text{ мВт}.$$

Потужність джерел

$$P_{\text{дж}} = E_1 I_5 - E_2 I_6 = 6 \cdot 4.5 - 1 \cdot 3.5 = 23.5 \text{ мВт}.$$

Оскільки $P_{\text{спож}} = P_{\text{дж}}$, то баланс потужностей виконується.

Відповідь: $I_1 = 2.5 \text{ мА}, I_2 = 2 \text{ мА}, I_3 = 1 \text{ мА}, I_4 = 1 \text{ мА}, I_5 = 4.5 \text{ мА}, I_6 = 3.5 \text{ мА}.$

2.2.3. Метод вузлових напруг

Дуальними щодо контурних струмів є *вузлові напруги* – напруги між вузлами схеми та базисним вузлом. Так, у схемі, зображеній на рис. 2.17, вузловими напругами є: $V_1 = u_4$, $V_2 = u_5$, $V_3 = u_6$. Через вузлові напруги можна виразити напруги віток за допомогою рівнянь (2.20). Вузлові рівняння складаються за *методом вузлових напруг*, що є дуальним до методу контурних струмів, а саме:

- у заданій схемі вибирають незалежні перерізи, наприклад такі, що охоплюють вузли, крім базисного вузла, і у кожному перерізі вибирають довільно, бажано однакові, напрямки вузлових напруг;
- для кожного перерізу складаються рівняння, одна частина яких є задавальним струмом, а інша – сумою добутків власної провідності на напругу вузла та взаємних провідностей на напруги інших вузлів.

Задавальним струмом вузла називають алгебраїчну суму струмів джерел, приєднаних до вузла, причому струми мають знак «плюс», якщо їх напрямок збігається з напрямком вузлової напруги, і знак «мінус» – у протилежному разі. Власною провідністю називають суму провідностей віток, приєднаних до вузла, а взаємною провідністю – провідність вітки, що з'єднує два вузли. Остання має знак «плюс», якщо вузлові напруги направлені однаково відносно вітки (і протилежно відносно вузлів), і знак «мінус» – у протилежному разі.

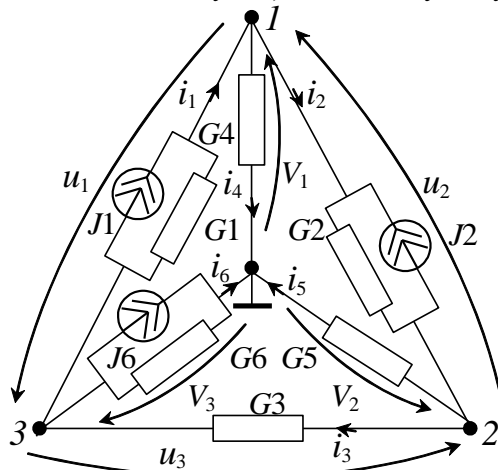


Рис. 2.17

Користуючись правилом методу вузлових напруг, джерела напруг у схемі (див. рис. 2.16) потрібно еквівалентно перетворити у джерела струму і отримати схему, зображену на рис. 2.17. Для цієї схеми вузлові рівняння мають такий вигляд:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_4)V_1 - R_2V_2 - R_3V_3 = J_1 + J_2; \\ -G_2V_1 + (R_2 + R_4)V_2 - R_4V_3 = -J_2; \\ -R_3V_1 - R_4V_2 + (R_3 + R_4)V_3 = -J_1 - J_6. \end{cases}$$

Приклад 2.9. У колі (рис. 2.18) визначити струми у гілках методом вузлових напруг. Перевірити виконання балансу потужностей. Значення елементів наведені на схемах: опори в кОм, струми – мА.

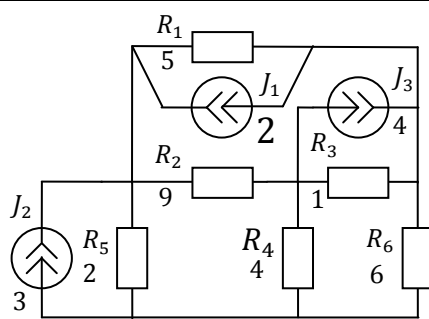


Рис. 2.18

Розв'язання

У колі (рис. 2.18) пронумеруємо вузли та зазначимо додатні напрямки вузлових напруг (рис. 2.19).

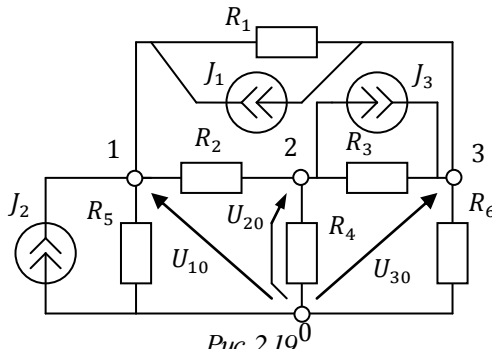


Рис. 2.19

Система рівнянь на основі МВН

$$\begin{cases} J_1 + J_2 = (g_1 + g_2 + g_5)U_{10} - g_2U_{20} - g_1U_{30}; \\ -J_3 = -g_2U_{10} + (g_2 + g_3 + g_4)U_{20} - g_3U_{30}; \\ J_3 - J_1 = -g_1U_{10} - g_3U_{20} + (g_1 + g_3 + g_6)U_{30}. \end{cases}$$

Підставимо числові значення

$$\begin{cases} 5 = 0.811U_{10} - 0.111U_{20} - 0.2U_{30}; \\ -4 = -0.111U_{10} + 1.361U_{20} - U_{30}; \\ 2 = -0.2U_{10} - U_{20} + 1.367U_{30}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь одержимо вузлові напруги

$$U_{10} = 6.29 \text{ В}, U_{20} = -1.457 \text{ В}, U_{30} = 1.317 \text{ В}.$$

У колі (рис. 2.19) оскільки вузлова напруга $U_{20} = -1.457 \text{ В} < 0$, то її напрям змінимо на протилежний (рис. 2.20).

За другим законом Кірхгофа напруги на елементах

$$U_1 = U_{10} - U_{30} = 6.29 - 1.317 = 4.97 \text{ В};$$

$$U_2 = U_{10} + U_{20} = 6.29 + 1.457 = 7.75 \text{ В};$$

$$U_3 = U_{20} + U_{30} = 1.457 + 1.317 = 2.77 \text{ В}.$$

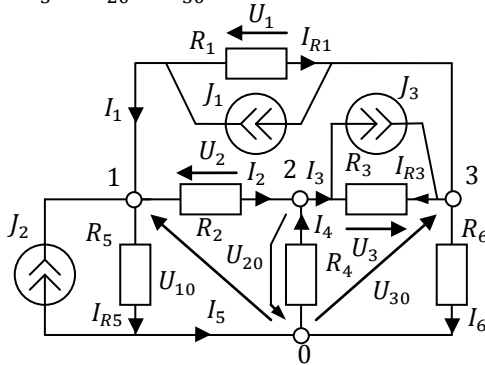


Рис. 2.20

За законом Ома визначимо струми у гілках (рис. 2.20)

$$I_{R1} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4.97}{5} \cong 1 \text{ мА}; \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{7.75}{9} = 0.861 \text{ мА};$$

$$I_{R3} = \frac{U_3}{R_3} = \frac{2.77}{1} = 2.77 \text{ мА}; \quad I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \frac{1.457}{4} = 0.364 \text{ мА};$$

$$I_{R5} = \frac{U_{10}}{R_5} = \frac{6.29}{2} = 3.14 \text{ мА}; \quad I_6 = \frac{U_{30}}{R_6} = \frac{1.317}{6} = 0.22 \text{ мА};$$

За першим законом Кірхгофа (рис. 2.20)

$$I_5 = I_{R5} - J_2 = 3.14 - 3 = 0.14 \text{ мА};$$

$$I_1 = J_1 - I_{R1} = 2 - 1 = 1 \text{ мА};$$

$$I_3 = J_3 - I_{R3} = 4 - 2.775 = 1.225 \text{ мА}.$$

Визначимо баланс потужностей схеми (рис. 2.20).

Потужність споживачів

$$\begin{aligned} P_{\text{СПОЖ}} &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_{R3}^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = \\ &= 1^2 \cdot 5 + 0.861^2 \cdot 9 + 2.775^2 \cdot 1 + 0.364^2 \cdot 4 + 0.14^2 \cdot 2 + 0.22^2 \cdot 6 = \\ &= 20.232 \text{ мВт}. \end{aligned}$$

Потужність джерел

$$P_{\text{ДЖ}} = E_1 I_1 - E_2 I_5 + J_3 U_3 = 10 \cdot 1 - 6 \cdot 0.14 + 2.775 \cdot 4 = 20.26 \text{ мВт}.$$

Оскільки $P_{\text{СПОЖ}} \cong P_{\text{ДЖ}}$, то баланс потужностей виконується.

Відповідь: $I_1 = 1 \text{ мА}, I_2 = 0.861 \text{ мА}, I_3 = 1.225 \text{ мА}, I_4 = 0.364 \text{ мА};$

$I_5 = 0.14 \text{ мА}; I_6 = 0.22 \text{ мА}.$

2.3. Розв'язання рівнянь електричних схем

2.3.1. Алгебраїчний метод розв'язання рівнянь

Складання рівнянь електричних схем не викликає труднощів, проводиться за чіткими алгоритмами, вони легко програмуються з метою використання ЕОМ. Основні труднощі аналізу, особливо щодо складних схем, пов'язані з необхідністю обчислення визначників високих порядків. Це зумовило розроблення багатьох методів розв'язання систем алгебраїчних рівнянь. Далі розглянуто алгебраїчний метод. Незалежно від методу складання, системи рівнянь лінійних схем мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} q_1 &= w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \dots + w_{1n}x_n, \\ q_1 &= w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \dots + w_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= w_{n1}x_1 + w_{n2}x_2 + \dots + w_{nn}x_n, \end{aligned}$$

де q_1, \dots, q_n – задавальні напруги чи струми; x_1, \dots, x_n – контурні струми чи вузлові напруги; w_{ii} – власні, w_{ij} – взаємні опори чи провідності. Відомо, що система лінійних алгебраїчних рівнянь еквівалентна *матричному рівнянню*

$$Q = WX,$$

де *матриця задавальних величин* $Q^t = [q_1, q_1, \dots, q_n]$, *матриця шуканих величин* $X^t = [x_1, x_1, \dots, x_n]$, а *матриця параметрів схеми*

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix}.$$

Розв'язання матричного рівняння має вигляд

$$X = W^{-1}Q, \quad (2.22)$$

де *обернена матриця* $W^{-1} = \frac{1}{\Delta^W} \begin{bmatrix} \Delta_{11}^W & \Delta_{21}^W & \dots & \Delta_{n1}^W \\ \Delta_{12}^W & \Delta_{22}^W & \dots & \Delta_{n2}^W \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n}^W & \Delta_{2n}^W & \dots & \Delta_{nn}^W \end{bmatrix},$

Δ^W – визначник матриці W , Δ_{ij}^W – його алгебраїчні доповнення. Використовуючи правило перемноження матриць, з рівняння (3.22) знаходимо:

$$x_k = \frac{1}{\Delta^W} (\Delta_{1k}^W q_1 + \Delta_{2k}^W q_2 + \dots + \Delta_{nk}^W q_n), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

Звернімо увагу на те, що для знаходження шуканих змінних, згідно з (2.23), достатньо мати матриці W та Q . Ці матриці повністю описують схему – як топологію, так і параметри – і можуть використовуватись як математична модель схеми. Ці матриці можна скласти безпосередньо за схемою, і навпаки, по них можна скласти відповідну схему.

Приклад 2.10. Скласти *матриці провідностей* G і *задавальних струмів* J схеми (див. рис. 2.17).

Розв'язання. Заготовляємо бланк матриці третього порядку (по числу незалежних перерізів) і записуємо у діагональні клітини – власні, а в недіагональні – взаємні провідності:

$$G = \begin{bmatrix} (G_1 + G_2 + G_4) & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & (G_2 + G_3 + G_5) & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & (G_1 + G_3 + G_6) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Матриця задавальних струмів складається аналогічно:

$$J' = [J_1 + J_2 \quad -J_2 \quad -J_1 - J_6]. \quad (2.25)$$

Маючи матриці G та J , можна скласти схему, яку вони описують. Для цього пропонуємо 4 вузли (четвертий – базисний). Елементи взаємних провідностей включаємо між відповідними вузлами. Елементи ж, що входять тільки у власну провідність, – між даним і базисним вузлом. Наприклад, G_2 включаємо між першим та другим вузлами, а провідність G_4 – між першим та базисним вузлами. Джерело J_1 включаємо між першим і третім вузлами, оскільки воно утворює задавальний струм як першого, так і третього вузлів.

2.3.2. Схемні функції

На рис. 2.21 показано схему, в якій виділено вхід із джерелом E та вихід із навантаженням R_H . Як дію можна розглядати струм i_a або напругу u_a джерела, а інші три змінні – як реакцію на цю дію. У лінійних схемах змінні реакції пропорційні величині дії:

$$R_{\text{вх}} = \frac{u_a}{i_a}, G_{\text{вх}} = \frac{i_a}{u_a}, K_i = \frac{i_b}{i_a}, K_U = \frac{u_b}{u_a}, R_{\text{пер}} = \frac{u_b}{i_a}, G_{\text{пер}} = \frac{i_b}{u_a}. \quad (2.26)$$

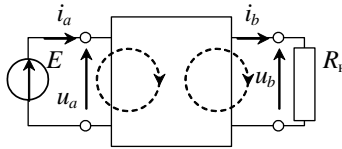


Рис. 2.21

Коефіцієнти пропорційності – *вхідний опір* $R_{\text{вх}}$, *вхідна провідність* $G_{\text{вх}}$, *коефіцієнти передачі струму* K_i та *напруги* K_U , *передавальні опір* $R_{\text{пер}}$ та *провідність* $G_{\text{пер}}$, що являють собою відношення змінних реакції до змінної дії, називаються *схемними функціями* (СФ). Між СФ існують залежності

$$R_{\text{пер}} = K_i R_H, G_{\text{пер}} = K_U R_H, R_{\text{вх}} = R_H K_i / K_U, G_{\text{вх}} = G_H K_U / K_i,$$

що доводиться підстановкою відповідних виразів із (2.26). Доведемо першу із формул: $K_i R_H = (i_b / i_a) (u_b / i_b) = u_b / i_a = R_{\text{пер}}$. Аналогічно доводяться і решта формул. Отже, досить знати K_U , K_i та R_H , щоб визначити решту СФ. Маючи СФ, можна знаходити струми та напруги на вході та виході схеми по заданій дії, наприклад $u_a = R_{\text{вх}} i_a, \dots, i_b = G_{\text{пер}} u_a$. Тож аналіз схеми зводиться до знаходження СФ.

Нехай складено матрицю R схеми (див. рис. 2.21), причому вхід розташовано в a -му контурі, а вихід – у b -му. Задавальна напруга a -го контура дорівнює u_a , а решти – нулю. Тоді, беручи в (2.23) $k = a, b, x_a = i_a, x_b = i_b, q_a = u_a, q_l = 0$ при $l \neq a$, знаходимо: $i_a = u_a \Delta_{aa}^R / \Delta^R, i_b = u_a \Delta_{ab}^R / \Delta^R$. Крім того, $u_b = R_H i_b$. Із цих рівнянь одержуємо вирази схемних функцій через елементи матриці опорів:

$$R_{\text{вх}} = \frac{\Delta^R}{\Delta_{aa}^R}, G_{\text{вх}} = \frac{\Delta_{aa}^R}{\Delta^R}, K_i = \frac{\Delta_{ab}^R}{\Delta_{aa}^R}, K_U = \frac{\Delta_{ab}^R R_H}{\Delta^R}, R_{\text{пер}} = \frac{\Delta_{ab}^R R_H}{\Delta_{aa}^R}, G_{\text{пер}} = \frac{\Delta_{ab}^R}{\Delta^R}. \quad (2.27)$$

Відповідно до принципу дуальності можна одержати вирази схемних функцій через елементи матриці G :

$$R_{\text{вх}} = \frac{\Delta_{aa}^G}{\Delta^G}, G_{\text{вх}} = \frac{\Delta^G}{\Delta_{aa}^G}, K_i = \frac{\Delta_{ab}^G G_n}{\Delta^G}, K_U = \frac{\Delta_{ab}^G}{\Delta_{aa}^G}, R_{\text{пер}} = \frac{\Delta_{ab}^G}{\Delta^G}, G_{\text{пер}} = \frac{\Delta_{ab}^G G_n}{\Delta_{aa}^G}. \quad (2.28)$$

Таким чином, для знаходження СФ досить мати одну з матриць параметрів.

Приклад 2.11. Розрахувати вхідний опір та коефіцієнт передачі напруги Т-подібного атенюатора, навантаженого на опрі R_4 (рис. 2.22). Опори на схемі задані в кОм.

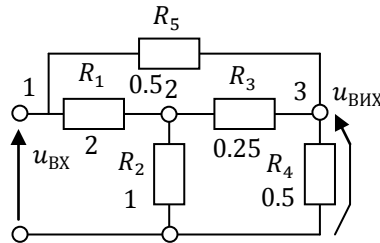


Рис. 2.22

Розв'язання. Складаємо матрицю провідностей

$$G = \begin{bmatrix} (g_1 + g_5) & -g_1 & -g_5 \\ -g_1 & (g_1 + g_2 + g_3) & -g_3 \\ -g_5 & -g_3 & (g_3 + g_4 + g_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -0.5 & -2 \\ -0.5 & 5.5 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Із формул (2.28) випливає

$$K_U = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} = \frac{13}{28} \cong 0.46;$$

$$R_{\text{ВХ}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{28}{38} = 0.74,$$

Де визначники були розраховані

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 5.5 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 5.5 \cdot 8 - (-4) \cdot (-4) = 44 - 16 = 28;$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} -0.5 & -4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = (-0.5) \cdot 8 - (-2) \cdot (-4) = -4 - 8 = -12;$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -0.5 & 5.5 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-0.5) \cdot (-4) - (-2) \cdot (5.5) = 2 + 11 = 13;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2.5 & -0.5 & -2 \\ -0.5 & 5.5 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 2.5 \cdot \Delta_{11} - (-0.5) \cdot \Delta_{12} - 2 \cdot \Delta_{13} =$$

$$= 2.5 \cdot 28 + 0.5 \cdot (-12) - 2 \cdot 13 = 70 - 6 - 26 = 38.$$

2.4. Комп'ютерне моделювання

2.4.1. Еквівалентні перетворення електричних схем

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- еквівалентних перетворень пасивних кіл;
- еквівалентних перетворень джерел напруги і струму;
- теореми про еквівалентний генератор.

1. Дослідити еквівалентні перетворення схем, що містять послідовні і паралельні з'єднання елементів. Скласти схему, показану рис. 2.23. Варіанти параметрів схеми наведено в табл. 2.5.

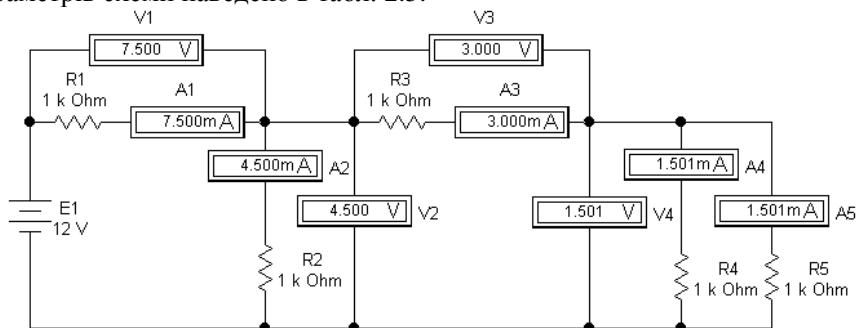



Рис. 2.23

Таблиця 2.5

Номер варіанта	E1, В	R1, кОм	R2, кОм	R3, кОм	R4, кОм	R5, кОм
1	5	1	1	1	1	1
2	5	1	1	1	2	2
3	10	2	2	2	2	2
4	10	2	2	2	4	4
5	15	3	3	2	4	4
6	15	2	2	3	3	3
7	20	3	3	4	4	4
8	20	3	3	3	5	5

Виміряти напруги і струми всіх елементів схеми, показаної на  рис. 2.23. Результати вимірювань звести до такої таблиці (перший рядок):

i_e , мА	u_1 , В	i_1 , мА	u_2 , В	i_2 , мА	u_3 , В	i_3 , мА	u_4 , В	i_4 , мА	i_5 , мА
7,507	7,500	7,500	4,500	4,500	3,000	3,000	1,501	1,501	1,501
7,507	7,500	7,500	4,500	4,500	3,000	3,000	1,501	—	—
...

Паралельно з'єднані опори R4 і R5 еквівалентно замінити одним опором R6, розрахованим за формулою

$$R_6 = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}.$$

Скласти еквівалентну схему, показану на рис. 2.24. Виміряти напруги і струми елементів тої частини схеми, якої не торкнулось еквівалентне перетворення. Звести результати вимірів до таблиці (рядок 2), показаної вище, і порівняти ці виміри з вимірами у схемі, рис. 2.23 (рядок 1). Довести, що заміна опорів R4 і R5 опором R6 є еквівалентною.

Замінити послідовно з'єднані опори R_3 і R_6 еквівалентно опором $R_7 = R_3 + R_6$, склавши схему, зображену на рис. 2.25. Виміряти напруги і струми елементів тієї частини схеми, якої не торкнулось еквівалентне перетворення. Звести результати вимірів до таблиці і порівняти ці виміри з вимірами у схемах, показаних на рис. 2.23 і 2.24. Довести, що заміна опорів R_3 і R_6 опором R_7 є еквівалентною.

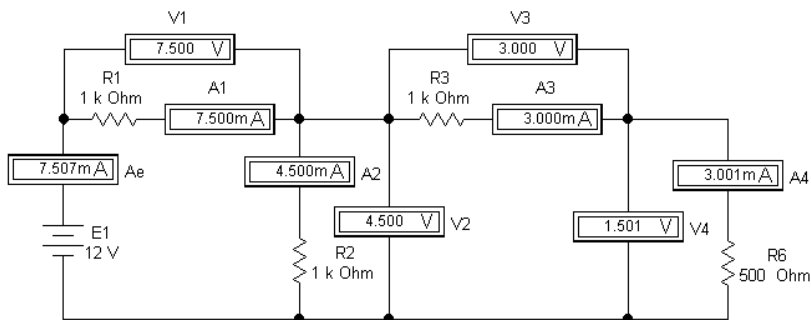


Рис. 2.24

Замінити паралельно з'єднані опори R_2 і R_7 еквівалентно опором

$$R_8 = \frac{R_2 R_7}{R_2 + R_7},$$

склавши схему, показану на рис. 2.25. Виконати виміри струмів і напруг у цій схемі і порівняти їх зі струмами і напругами в тих самих елементах попередніх схем, довівши їх еквівалентність.

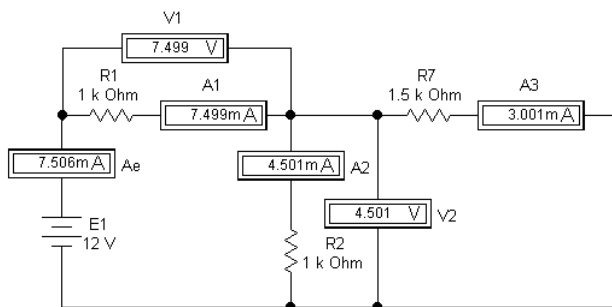


Рис. 2.24

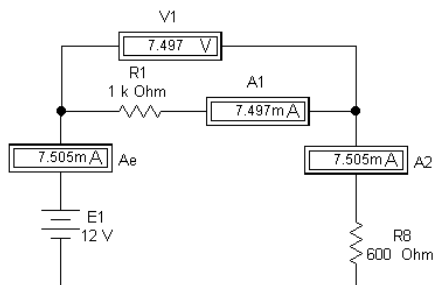


Рис. 2.25

Замінити послідовно з'єднані опори R_1 і R_8 еквівалентно опором $R_9 = R_1 + R_8$, склавши схему, рис. 2.26. Виміряти струм у джерелі. Довести, що заміна опорів R_1 і R_8 опором R_9 є еквівалентною. Пояснити невеликі відхилення у вимірах напруг і струмів від умов еквівалентності впливом внутрішніх опорів вольтметрів і амперметрів.

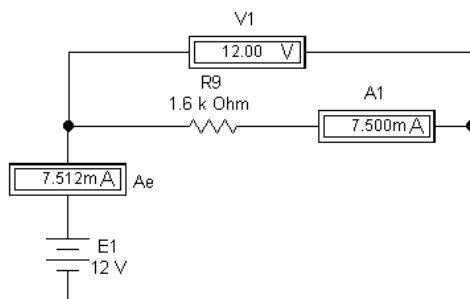


Рис. 2.26

2. Дослідити еквівалентність перетворення «зірка — трикутник», склавши схему, зображену на рис. 2.27. Варіанти параметрів схеми (див. рис. 2.27) наведено в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Номер варіанта	E1, В	E2, В	R1, кОм	R2, кОм	R3, кОм	R4, кОм	R5, кОм	R6, кОм
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	10	2	2	1	1	1	2
2	5	10	1	1	1	2	2	2

Кінець таблиці 3.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	10	5	2	1	1	2	2	1
4	10	5	2	2	2	4	4	4
5	15	10	3	3	2	4	4	4
6	15	10	2	2	3	3	3	3
7	20	15	3	3	4	4	4	3
8	20	15	3	3	3	5	5	5

Виміряти струми в цій схемі, звівши результати вимірів у таку таблицю (перший рядок):

i_1 , мА	i_2 , мА	i_3 , мА	i_4 , мА	i_5 , мА	i_6 , мА
7,500	3,000	4,500	1,500	1,500	6,000
7,500	—	4,500	—	—	6,000
7,502	—	—	1,500	—	6,001

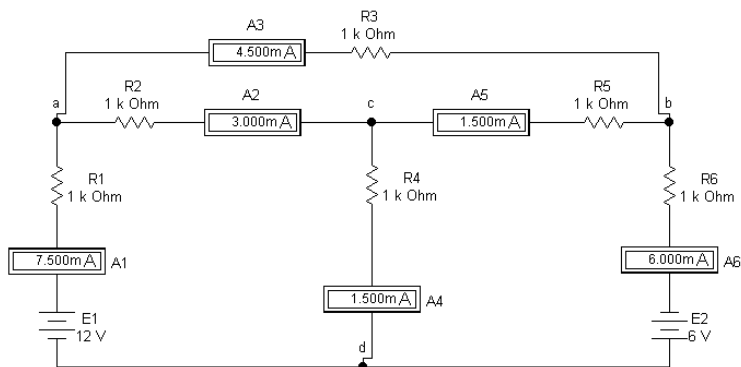


Рис. 2.27

У схемі, зображеній на рис. 2.27, опори R2, R4, R5 утворюють з'єднання «зірка». Замінити еквівалентно цю частину схеми на з'єднання «трикутник», розрахувавши опори його елементів за формулами рядка 4 табл. 2.1, утворивши схему на рис. 2.28. Виміряти струми елементів тієї частини схеми, якої не торкнулось еквівалентне перетворення. Звести результати вимірів до таблиці (рядок 2) і порівняти ці виміри з вимірами у схемі, зображеній на рис. 2.27. Довести, що виконана заміна «зірка — трикутник» є еквівалентною.

У вихідній схемі, зображеній на рис. 2.27, опори R2, R3, R5 утворюють з'єднання «трикутник». Замінити еквівалентно цю частину схеми на з'єднання «зірка», розрахувавши опори її елементів за формулами рядка 4 табл. 3.1 й утворивши схему, зображену на рис. 2.29. Виміряти струми елементів тієї частини схеми, якої не торкнулось еквівалентне перетворення. Звести результати вимірів до таблиці (рядок 3) і порівняти ці виміри з вимірами у схемі на рис. 2.27. Довести, що виконана заміна «трикутник — зірка» є еквівалентною.

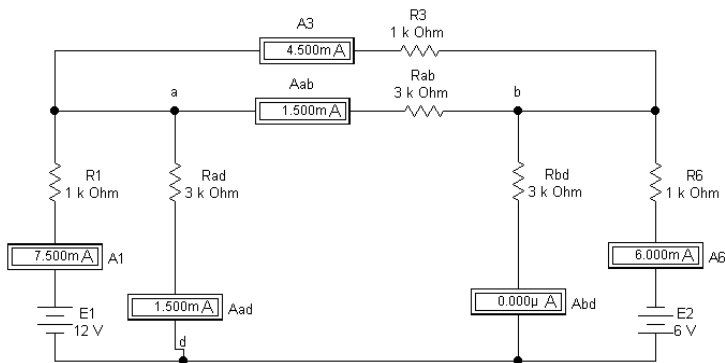


Рис. 2.28

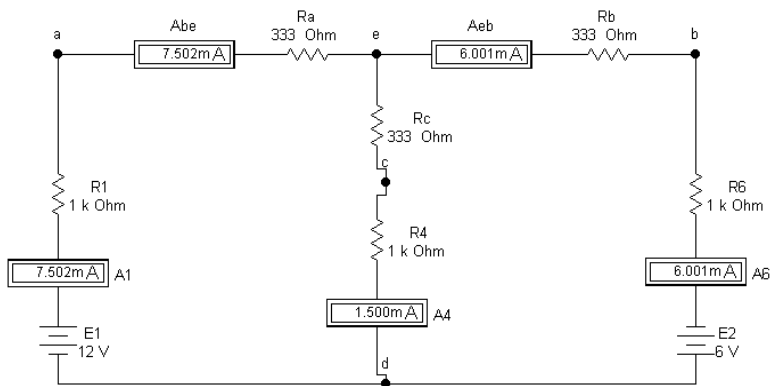


Рис. 2.29

3. Дослідити еквівалентне перетворення джерел напруги і струму. Замінити еквівалентно у схемі на рис. 2.27 джерела напруги на джерела струму, отримавши схему, показану на рис. 2.30. Параметри еквівалентних джерел струму розрахувати за формулами рядка 3 табл. 2.1.

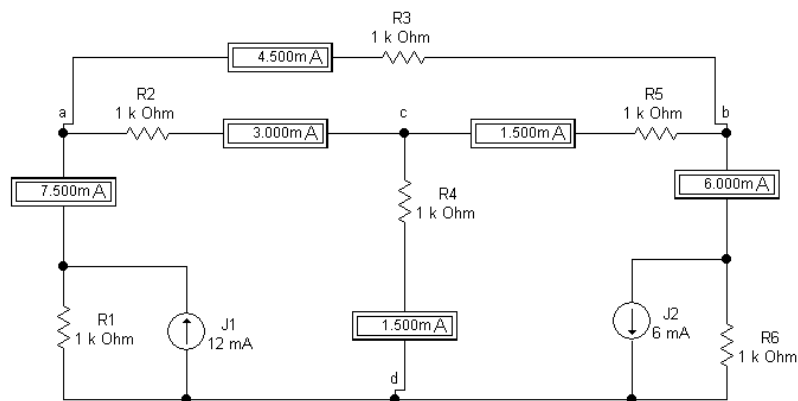


Рис. 2.30

Виміряти струми у вітках схеми, зображеної на рис. 2.30, і порівняти їх зі струмами у схемі на рис. 2.27. За результатами вимірів довести еквівалентність цих схем.

4. Експериментально перевірити справедливості теореми про еквівалентний генератор, склавши схему, показану на рис. 2.31. Варіанти параметрів схеми наведено в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_1 , В	25	20	15	10	5	25	20	15	10	5
E_2 , В	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
R_1 , кОм	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
R_2 , кОм	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5
R_3 , кОм	5	5	5	5	5	1	1	1	1	1
R_n , кОм	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3

У цій схемі джерела E1, E2 і опори R1, R2, R3 утворюють активний двополіусник із зовнішніми полюсами A, B. Навантаженням активного двополіусника є опір Rn.

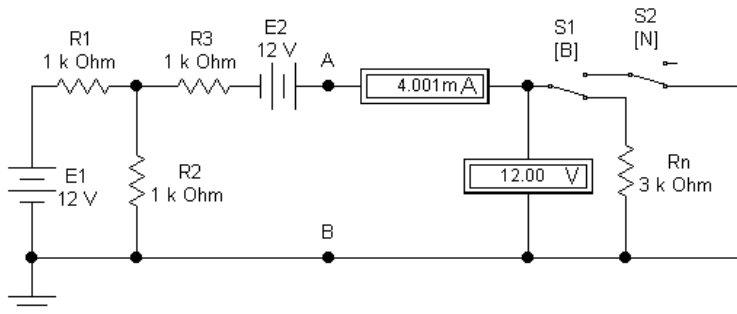


Рис. 2.31

Перемикачем S1 підімкнути до двополіусника навантаження і виміряти напругу і струм у ньому. Після цього перемикачами S1, S2 закоротити вихід двополіусника і виміряти струм короткого замикання I_k . Далі перемикачем S2 розімкнути вихід двополіусника і виміряти напругу холостого ходу U_x . Розрахувати параметри еквівалентного генератора за формулами рядка 5 табл. 2.1, а саме:

$$E_e = U_x; R_e = \frac{U_x}{I_k}.$$

Замінити активний двополіусник (рис. 2.31) еквівалентним генератором (рис. 2.32).

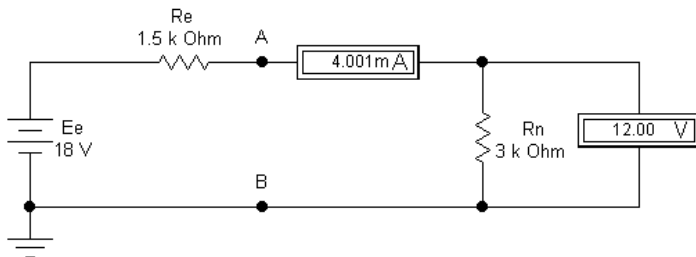


Рис. 2.32

Виміряти струм і напругу в навантаженні у схемі, зображений на рис. 2.32. Порівняти ці виміри з вимірами струму і напруги в навантаженні двополюсника у схемі на рис. 2.31, довівши еквівалентність цих схем.

Замінити у схемі, показаній на рис. 2.32, еквівалентний генератор із джерелом напруги еквівалентним генератором з джерелом струму (див. рис. 2.33), розрахувавши параметри останнього за формулами:

$$J_e = i_k; R_e = \frac{U_x}{i_k}.$$

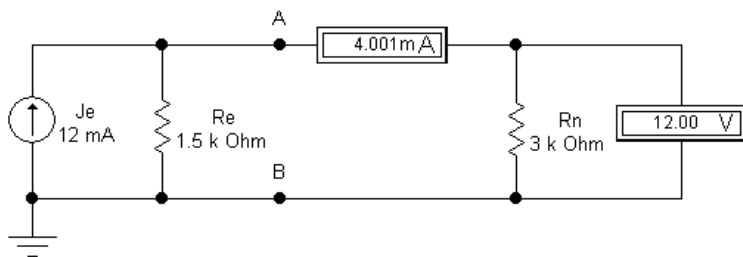


Рис. 2.33

Виміряти струм і напругу в навантаженні у схемі, показаній на рис. 2.33. Порівняти ці виміри з вимірами струму і напруги в навантаженні двополюсника у схемах, зображених на рис. 2.31 і 2.32, довівши еквівалентність цих схем.

2.4.2. Дослідження лінійних електричних кіл у режимі постійних струмів

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- режиму постійних струмів у лінійних колах;
- методики складання повної системи рівнянь схеми за законами Ома та Кірхгофа та їх експериментальну перевірку;
- методики складання рівнянь схеми за методом контурних струмів та експериментальну перевірку їх розв'язку;
- методики складання рівнянь схеми за методом вузлових напруг та експериментальну перевірку їх розв'язку.

1. За заданими у табл. 2.8 параметрами скласти контурні рівняння схеми, показаної на рис. 2.34, розв'язавши які, знайти контурні струми. Через контурні струми виразити струми елементів схеми. Виміряти струми у схемі на рис. 2.34 і порівняти їх із розрахованими величинами відповідних струмів.

Перевірити виконання балансу потужностей. Для цього розрахувати потужності джерел і пасивних елементів і порівняти суми потужностей джерел і навантажень.

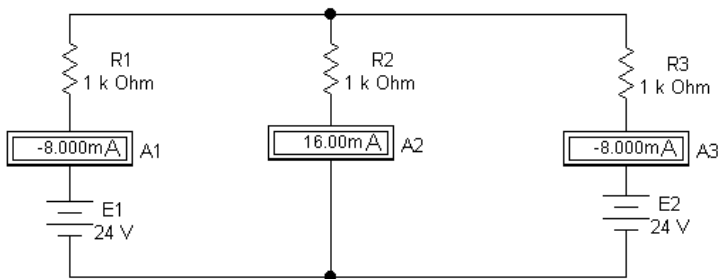


Рис. 2.34

Таблиця 2.8

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_1 , В	25	20	15	10	5	25	20	15	10	5
E_2 , В	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
R_1 , кОм	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
R_2 , кОм	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5
R_3 , кОм	5	5	5	5	5	1	1	1	1	1

2. Скласти схему, зображену на рис. 2.35. Варіанти параметрів взяти у табл. 2.9.

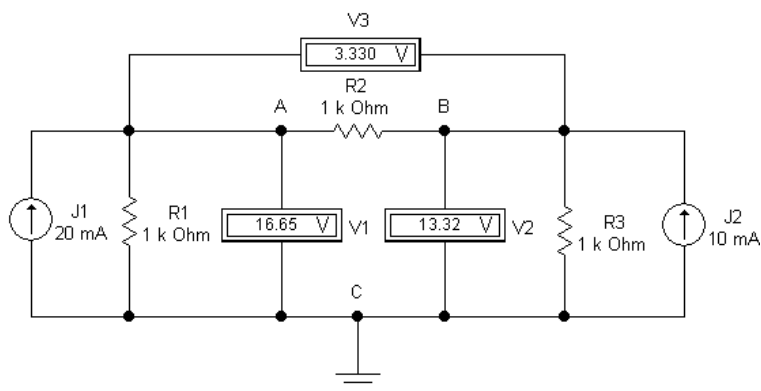


Рис. 2.35

Скласти рівняння за методом вузлових напруг, розв'язати їх і знайти вузлові напруги вузлів А, В. Виміряти ці напруги у схемі, зображеній на рис. 2.35, і порівняти виміряні і розраховані величини напруг. Через вузлові напруги виразити напруги віток схеми і розрахувати струми віток.

3. За законами Ома і Кірхгофа скласти повну систему рівнянь схеми на рис. 3.34, розв'язавши яку, визначити струми і напруги елементів схеми. Порівняти розраховані величини струмів і напруг із їх величинами, виміряними у п. 1.

Таблиця 2.9

Номер варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_1 , мА	25	20	15	10	5	25	20	15	10	5
J_2 , мА	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
R_1 , кОм	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
R_2 , кОм	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5
R_3 , кОм	5	5	5	5	5	1	1	1	1	1

2.4.3. Дослідження енергетичних процесів в електричних колах у режимі постійних струмів

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- застосування теореми про еквівалентний генератор;
- залежності потужності і коефіцієнта корисної дії від опору навантаження;

- умов узгодження навантаження із джерелом живлення.

1. Встановити варіант параметрів елементів вихідної схеми, зображеної на рис. 2.31, згідно до табл. 2.7.

Розглядаючи частину схеми лівіше вузлів А, В як активний двополюсник, замінити його еквівалентним генератором. Розрахувати параметри еквівалентного генератора, R_e і E_e , виразивши їх через параметри вихідної схеми. Напругу E_e розраховують як напругу холостого ходу у вихідній схемі, а еквівалентний опір генератора R_e знаходять як опір пасивного двополюсника, який утворюється, якщо у вихідному активному двополюснику погасити дію джерел напруги, прирівнявши до нуля їх напругу. Довести еквівалентність заміни вихідної схеми еквівалентним генератором. Для цього встановити розраховані параметри еквівалентного генератора (див. рис. 2.32) і заміряти струм в опорі навантаження R_n у вихідній схемі та у схемі з еквівалентним генератором. Рівність цих струмів є доказом еквівалентності такої заміни.

2. Дослідити залежність потужності у навантаженні і коефіцієнта корисної дії кола «джерело — навантаження» від опору навантаження. Змінюючи опір навантаження у схемі еквівалентного генератора (див. рис. 2.32) і у вихідній схемі (див. рис. 2.31), у межах від 0 до 10 кОм через 0,5 кОм, зняти і побудувати графіки залежності струму і напруги у навантаженні від опору навантаження. Розрахувати і побудувати на цьому ж самому графіку залежності потужності P_n у навантаженні і коефіцієнта корисної дії η від опору навантаження. Розрахунки виконати за формулами:

$$P_n = UI, \quad \eta = P_n / P_e, \quad P_e = E_e I.$$

3. Дослідити умови узгодження навантаження із джерелом електричної енергії. Метою узгодження є одержання максимальної потужності у навантаженні. За результатами вимірювань у п. 2 потрібно визначити опір навантаження, при якому потужність набуває максимального значення. Пояснити отримані результати.

РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНІ КОЛА ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ

3.1. Математичні моделі і параметри гармонічних коливань

3.1.1. Параметри гармонічних коливань

Як вже зазначалося, струми і напруги мають вільні й примушені складові. Вільні з часом зменшуються до нуля, бо вони зумовлені скінченною енергією, запасеною в колі. Тому після закінчення перехідного процесу та ввімкнення джерела залишаються лише вимушені складові. Якщо до кола ввімкнути джерело гармонічної напруги чи струму, то примушені складові як частинні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь також будуть гармонічними функціями часу. Таким чином, при гармонічній дії в лінійних колах встановлюється *режим гармонічних коливань*, за якого всі струми і напруги є гармонічними коливаннями однакової частоти і відрізняються амплітудами та фазами. У багатьох практичних задачах розглядаються саме такі режими.

Часова модель *гармонічного коливання* має вигляд

$$x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_x\right) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x), \quad (3.1)$$

де X_m – амплітуда, $\omega = 2\pi f$ – колова частота, φ_x – початкова фаза коливання. Період T пов'язаний із циклічною частотою f співвідношенням $f = 1/T$. Частота f вимірюється у герцах (Гц) і дорівнює числу коливань за секунду. Величина $\psi = \omega t + \varphi_x$ називається *фазою* коливання. Оскільки

$$\sin(\omega t + \varphi_x) = \cos(\omega t + \varphi_x - 90^\circ),$$

функції синус та косинус можна розглядати як одну й ту саму функцію – гармонічну за різних початкових фаз. На рис. 3.1 показано осцилограму гармонічного коливання, де видно амплітуду X_m і період T . За осцилограмою можна також визначити початкову фазу. Якщо описати коливання функцією синуса, то при $t = -t_1$ фаза $-\omega t_1 + \varphi_{x1} = 0$, звідки $\varphi_{x1} = \omega t_1$. Якщо ж описати коливання функцією косинус, то фаза дорівнюватиме нулю при $t = t_2$, отже, $\varphi_{x2} = -\omega t_2$. По осі абсцис часто замість t відкладають ωt . Тоді початкові фази φ_{x1} , φ_{x2} , відшукуються як відповідні відрізки на рис. 3.1.

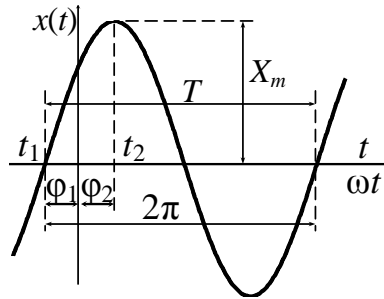


Рис. 3.1

Із (3.1) випливає, що гармонічне коливання однозначно визначається трьома своїми параметрами: амплітудою, початковою фазою та частотою або періодом.

КМ 3.1. За осцилограмами, отриманими у п. 4 підрозділу 1.6.1, визначити амплітуди і періоди коливань. Маючи період, розрахувати частоту і порівняти її з частотою, заданою на генераторі.

Окрім цих параметрів, у практичних задачах цікавляться такими узагальненими параметрами, як середнє та діюче значення коливання. Середнє значення або ж стала складова коливання визначається за формулою

$$X_{\text{cp}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt.$$

Якщо $x(t)$ — струм $i(t)$, то

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt = \Delta q / (t_2 - t_1), \quad (3.2)$$

де Δq — заряд, що переносить струм за час від t_1 до t_2 .

Діюче значення коливання є його енергетичним параметром. Нехай в опорі R протікає струм $i(t)$. Миттєва потужність $p(t) = Ri^2(t)$. Знайдемо енергію,

яка виділяється в опорі за проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$: $\Delta W = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt$.

Визначимо середню потужність струму за проміжок Δt як

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt. \quad (3.3)$$

Назвемо діючим значенням періодичного струму i такий постійний струм I , який в опорі R за час $\Delta t = T$ виділяє таку саму енергію, що й струм i . Ін-акше кажучи, потужність струму I дорівнює середній потужності струму i за період T , тобто $RI^2 = R/T \int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t) dt$, звідки знаходимо вираз для діючого значення

$$I = \sqrt{1/T \int_{t_1}^{t_1+T} i^2(t) dt}. \quad (3.4)$$

Активною потужністю струму називають його середню за період по-тужність

$$P = RI^2 = GU^2 = UI,$$

де U – діюче значення напруги.

Приклад 3.1. Визначити середнє та діюче значення гармонічного струму з амплітудою I_m .

Розв'язання. Беремо інтеграл $\int_{t_1}^{t_1+T} I_m^2 \cos^2((2\pi/T)t) dt = I_m^2 T/2$ і за форму-лою (5.4) знаходимо діюче значення гармонічного струму

$$I = I_m / \sqrt{2}.$$

Середнє значення знаходимо за формулою (5.2):

$$I_0 = 1/T \int_{t_1}^{t_1+T} I_m \cos((2\pi/T)t + \varphi_i) dt = 0.$$

Приклад 3.2. Знайти діюче та середнє значення струмів (див. рис. 3.2) і активну потужність в опорі $R = 100 \text{ Ом}$ при $I_m = 0,1 \text{ А}$.

Розв'язання. Знаходимо середні значення струмів:

$$I_{\text{аср}} = 1/T \int_0^{T/2} I_m \sin((2\pi/T)t) dt = I_m/\pi, \quad I_{\text{бср}} = 1/T \int_0^{T/3} I_m dt = I_m/3.$$

Знаходимо діючі значення струмів:

$$I_a = \sqrt{1/T \int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2((2\pi/T)t) dt} = I_m/2, \quad I_b = \sqrt{1/T \int_0^{T/3} I_m^2 dt} = I_m/\sqrt{3}.$$

Активну потужність знаходимо за формулою $P = RI^2$. Тоді для першого струму $P = 1/4 RI_m^2$ і для другого $P = 1/3 RI_m^2$.

3.1.2. Векторні зображення гармонічних коливань

Оскільки в режимі гармонічних коливань усі змінні мають однакові частоти і відрізняються лише амплітудами й фазами, аналіз таких режимів полягає у знаходженні амплітуд і фаз струмів і напруг або, як кажуть, у виявленні *амплітудно-фазових співвідношень*. Лінійні кола описуються лінійними інтегро-диференціальними рівняннями, в яких над змінними виконуються операції диференціювання, інтегрування, множення на константу та додавання. Ці операції зручно виконувати, користуючись відображенням гармонічних коливань векторами та комплексними числами.

Розглянемо вектор, що обертається з кутовою швидкістю ω (рис. 3.2). Його проекції на взаємно перпендикулярні осі є гармонічними функціями. Отже, кожній гармонічній функції можна поставити у відповідність вектор, який називатимемо зображувальним, або ж *векторним зображенням гармонічного коливання*. Виявляється, що певним математичним операціям над гармонічними функціями відповідають більш прості операції над зображувальними векторами, а саме:

- додаванню гармонічних функцій однакової частоти відповідає векторне додавання зображувальних векторів;
- множенню гармонічної функції на константу відповідає множення модуля вектора на цю саму константу;
- диференціюванню гармонічної функції відповідає обертання вектора на кут $+\pi/2$ та помноження його модуля на ω ;

- інтегруванню гармонічної функції відповідає обертання вектора на кут $-\pi/2$ і ділення його модуля на ω .

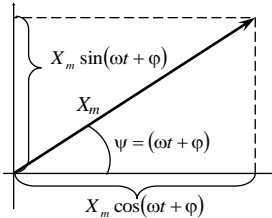


Рис. 3.2

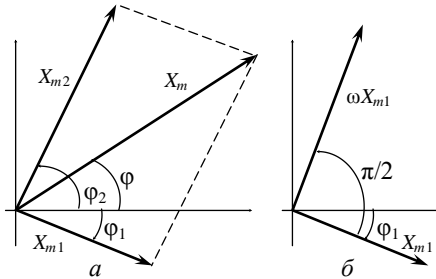


Рис. 3.3

Перше з цих тверджень випливає з того, що проекція сумарного вектора дорівнює сумі проекцій складових векторів, тобто

$$X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) + X_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Оскільки за однакових частот взаємне розташування векторів лишається у часі незмінним, досить зобразити їх у фіксований момент, наприклад при $t = 0$. Таке зображення називається *векторною діаграмою*. Амплітуда та фаза сумарного коливання відшукується за допомогою векторної діаграми (див. рис. 3.3, а). Друге твердження очевидне. Розглянемо третє. Нехай $x_1(t) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$. Тоді $x(t) = dx_1/dt = \omega X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi/2)$. Збудувавши зображувальні вектори (див. рис. 3.3, б) функцій $x_1(t)$ та $x(t)$, переконуємось у правильності цього твердження. Аналогічно доводиться й четверте твердження.

3.1.3. Комплексні амплітуди гармонічних коливань

Векторні зображення амплітудно-фазових співвідношень наочні, але незручні для розрахунків. Тому був розроблений аналітичний метод, що базується на відображенні гармонічних коливань комплексними амплітудами. Якщо зображувальний вектор розмістити на комплексній площині, йому відповідатиме комплексне число $\underline{X} = X_m e^{j\varphi_x}$, що називається *комплексною амплітудою* гармонічного коливання. Оскільки \underline{X} містить амплітуду X_m та фазу φ_x , між комплексною амплітудою та гармонічним коливанням існує однозначне співвідношення

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x) \xleftrightarrow{S} \underline{X} = X_m e^{j\varphi_x} \quad (3.5)$$

яке називається *зображенням* гармонічного коливання за *Штейнметцом*, що записують як $x(t) \longleftrightarrow \underline{X}$. Доведемо, що операціям над гармонічними функціями відповідають такі *операції над комплексними амплітудами*:

- сумі гармонічних функцій, помножених на константи, відповідає сума їх комплексних амплітуд, помножених на ті самі константи;
- диференціюванню відповідає помноження комплексної амплітуди на $j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця;
- інтегруванню відповідає ділення комплексної амплітуди на $j\omega$.

Перше твердження очевидне. Тому доведемо інші. Нехай

$$x_1(t) = X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \xrightarrow{S} \underline{X}_1 = X_{m1} e^{j\varphi_1}.$$

Тоді:

$$x(t) = dx_1(t)/dt = \omega X_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1 + \pi/2) \xrightarrow{S} \underline{X} = \omega X_{m1} e^{j(\varphi_1 + \pi/2)}.$$

Враховуючи, що $e^{j\pi/2} = j$, одержимо $\underline{X} = j\omega X_{m1} e^{j\varphi_1} = j\omega \underline{X}_1$, що й потрібно було довести. Аналогічно доводиться й третє твердження.

Оскільки операції диференціювання й інтегрування замінюються алгебраїчними операціями множення та ділення на $j\omega$, інтегро-диференціальні рівняння для миттєвих струмів і напруг перетворюються на алгебраїчні рівняння для комплексних амплітуд, розв'язання яких набагато простіше. На цьому базується аналіз гармонічних коливань методом комплексних амплітуд, за якого рівняння складаються для комплексних амплітуд, після розв'язку яких можна знайти миттєві значення коливань згідно зі співвідношенням (3.5), а отже, їх амплітуди, початкові фази, діючі значення, потужності.

Приклад 3.3. У проводах, що підходять до вузла, протікають струми, мА: $i_1 = 10 \sin(10^5 t + \pi/4)$, $i_2 = 10 \sin(10^5 t - \pi/4)$. Знайти струм i , що витікає з вузла.

Розв'язання. Згідно із ЗКС $i = i_1 + i_2$. Будуємо зображувальні вектори струмів i_1, i_2 у певнім масштабі та сумарний вектор (див. рис. 3.4). Довжина сумарного вектора дорівнює амплітуді $I_m = 10\sqrt{2}$, а кут між вектором та віссю — початковій фазі $\varphi = 0$ сумарного струму, отже, $i = 10\sqrt{2} \sin 10^5 t$. Розв'яжемо тепер задачу за допомогою комплексних амплітуд. Знаходимо комплексні амплітуди струмів $\underline{I}_1 = 10e^{j\pi/4}$, $\underline{I}_2 = 10e^{-j\pi/4}$. Комплексна амплітуда сумарного струму $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 10\sqrt{2}$. Отже, $\underline{I} \xrightarrow{S} i = 10\sqrt{2} \sin 10^5 t$.

Вектор краще над величиною ставити

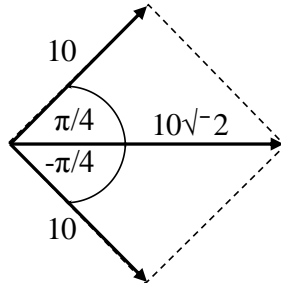


Рис. 3.4

Приклад 3.4. Скласти часові моделі напруг, що мають такі комплексні амплітуди, В: $\underline{U}_1 = (4 + j3)$, $\underline{U}_2 = 10e^{-5x}(\cos 10x - j\sin 10x)$ і частоту $\omega = 10^8 \text{ c}^{-1}$.

Розв'язання. Оскільки частота задана, потрібно знайти амплітуди та фази, що дорівнюють відповідно модулям і аргументам комплексних амплітуд. Тому задані комплексні амплітуди треба перевести в показникову форму:

$$\underline{U}_1 = 5e^{j\arctg 0,75}, \quad \underline{U}_2 = 10e^{-5x}e^{-j10x}.$$

Згідно з (3.5) маємо, В:

$$u_1(t) = 5\cos(10^8 t + \arctg 0,75), \quad u_2(t) = 10e^{-5x}\cos(10^8 t - 10x).$$

Приклад 3.5. До котушки, що має параметри $L = 1 \text{ мГн}$, $R = 10 \text{ Ом}$ підключено джерело гармонічної напруги з амплітудою $U_m = 10 \text{ В}$ і частотою $\omega = 10^4 \text{ c}^{-1}$. Знайти усталений струм.

Розв'язання. Моделюємо котушку схемою заміщення (див. рис. 4.10, б), в котрій $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$. Складаємо рівняння $Li' + Ri = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$. Усталений струм шукаємо як частинний розв'язок у вигляді $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$. Отже, задача зводиться до пошуку амплітуди I_m та фази φ_i струму. Зробимо це за допомогою векторної діаграми. Довільно будемо вектор з модулем I_m під кутом φ_i до осі x (рис. 3.5). Користуючись операціями над зображувальними векторами, будемо вектори напруг на опорі u_R та індуктивності u_L . Вектор напруги джерела u будемо як їх суму. З векторної діаграми випливає

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + U_{Lm}^2} = I_m \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = ZI_m,$$

$$\varphi = \arctg U_{Lm} / U_{Rm} = \arctg \omega L / R, \quad \varphi_i = \varphi_u - \varphi.$$

$$\text{Отже, } i = I_m \cos(\omega t + \varphi_u - \arctg \omega L / R) \quad I_m = U_m / Z, \quad Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Тепер розв'яжемо задачу, користуючись комплексними амплітудами. Вихідне рівняння перетворюємо до вигляду $j\omega L \underline{I} + R \underline{I} = \underline{U}$, де $\underline{U} = \underline{U}_m e^{j\varphi_u}$. Знаходимо комплексну амплітуду струму

$$\underline{I} = \underline{U} / (R + j\omega L) = \underline{U}_m e^{j(\varphi_u - \arctg \omega L/R)} / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

та відповідно до (5.5) миттєвий струм

$$i = \frac{U_m}{Z} \cos(\omega t + \varphi_u - \arctg \omega L/R).$$

Підставивши задані числові значення і поклавши $\varphi_u = 0$, отримаємо, мА: $i = 0,707 \cos(\omega t - \pi/4)$.

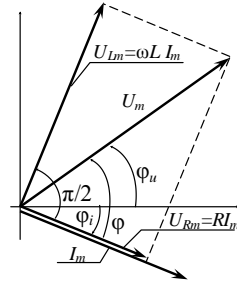


Рис. 3.5

3.2. Метод комплексних амплітуд

3.2.1. Комплексні опори, провідності, потужності

Розглянемо довільний пасивний двополюсник, у якого

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \xleftrightarrow{S} \underline{U} = U_m e^{j\varphi_u},$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \xleftrightarrow{S} \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}.$$

Назвемо *комплексним опором* двополюсника відношення комплексних амплітуд напруги і струму:

$$\underline{Z} = \underline{U} / \underline{I} = U_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} / I_m = Z e^{j\varphi}, \quad (3.6)$$

де модуль комплексного опору $Z = U_m / I_m$ дорівнює відношенню амплітуд напруги і струму і називається *повним опором*, а $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ – аргумент комплексного опору – дорівнює *різниці (зсуву) фаз* напруги та струму. Перепишемо (3.6) як

$$\underline{Z} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX. \quad (3.7)$$

Дійсна R та уявна X частини комплексного опору називаються *активним* та *реактивним опором*. Для пояснення фізичного смислу цих понять розглянемо векторну діаграму (рис. 3.6, а). Розкладемо вектор U_m на дві складові: *активну* U_{Rm} та *реактивну складові напруги* U_{Xm} . Такий векторний діаграмі відповідає послідовна еквівалентна схема двополюсника (див. рис. 3.6, б). З (3.6) та (3.7) випливає, що

$$R = (U_m / I_m) \cos \varphi = U_{Rm} / I_m, \quad X = (U_m / I_m) \sin \varphi = U_{Xm} / I_m,$$

тобто активний і реактивний опори є коефіцієнтами пропорційності між струмом та активною й реактивною складовими напруги. Зауважимо, що в активному опорі напруга та струм синфазні, а в реактивному — мають зсув фаз $\pi/2$. З урахуванням цього запишемо:

$$u_R = U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_i), \\ u_X = U_{Xm} \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2) = -U_{Xm} \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Миттєві потужності:

$$P_R(t) = u_R i = U_{Rm} I_m \cos^2(\omega t + \varphi_i) = U_{Rm} I_m (1 + \cos 2(\omega t + \varphi_i)) / 2,$$

$$P_X(t) = u_X i = U_{Xm} I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{Xm} I_m \sin 2(\omega t + \varphi_i) / 2.$$

Якщо підставити ці вирази у (3.3), з'ясується що середня (активна) потужність в активному опорі

$$P = U_{Rm} I_m / 2 = U_R I = UI \cos \varphi, \quad (3.8)$$

а в реактивному — дорівнює нулю. Енергетично реактивний опір не може характеризуватися середньою потужністю, яка завжди дорівнює нулю. Потрібна якась інша міра. Як таку використовують *реактивну потужність*, що дорівнює амплітуді миттєвої потужності в реактивному опорі, тобто

$$Q = U_{Xm} I_m / 2 = U_X I = UI \sin \varphi. \quad (3.9)$$

Поділивши кожен із векторів напруги діаграми (рис. 3.6, а) на I_m , одержимо *векторну діаграму опорів* (рис. 3.6, в), а помноживши на $I_m/2$ — *векторну діаграму потужностей* (рис. 3.6, г). Величина

$$S = I_m U_m / 2 = UI \quad (3.10)$$

називається *повною потужністю*. З векторної діаграми знаходимо:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad P = S \cos \varphi, \quad Q = S \sin \varphi. \quad (3.11)$$

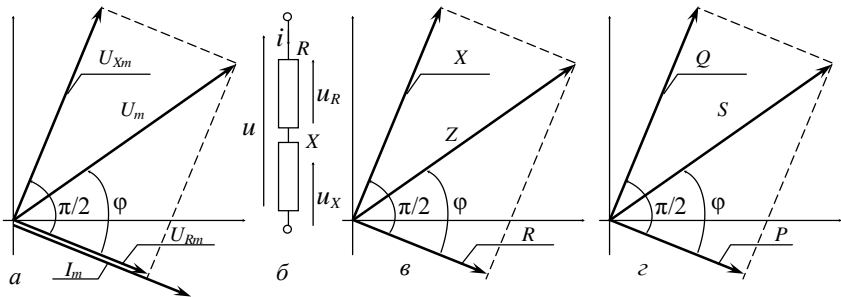


Рис. 5.6

Одиницями виміру потужностей є: активної – *ват* (Вт), реактивної – *вольт-ампер реактивний* (ВАр), повної – *вольт-ампер* (ВА).

КМ 3.2. Виконати завдання 1 з підрозділу 2.4.2.

Комплексна провідність двополюсника визначається як

$$\underline{Y} = \underline{I}/\underline{U} = I_m e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} / U_m = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = G - jB, \quad (3.12)$$

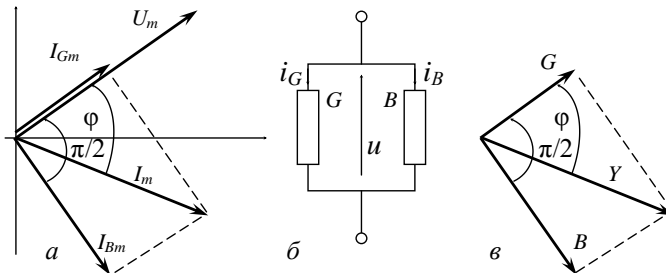


Рис. 3.7

де $Y = I_m/U_m$ – *повна провідність*, G та B – відповідно *активна й реактивна провідність*.

Розкладемо струм на дві складові: активну I_{Gm} й реактивну I_{Bm} (див. рис. 3.7, а). Цій діаграмі відповідає еквівалентна схема двополюсника (див. рис. 3.7, б). Оскільки $G = I_m \cos \varphi / U_m = I_{Gm} / U_m$, $B = I_m \sin \varphi / U_m = I_{Bm} / U_m$, то, поділивши вектори струмів на U_m , одержимо *діаграму провідностей* (див. рис. 3.7, в).

Як показано вище, є дві еквівалентні схеми двополюсника – послідовна (див. рис. 3.6, б) та паралельна (див. рис. 3.7, б). Отже, вони мають бути еквівалентними між собою. Умовою їх еквівалентності є $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$, або

$$R + jX = 1/(G - jB) = G/(G^2 + B^2) + jB/(G^2 + B^2),$$

звідки

$$R = G/(G^2 + B^2) = G/Y^2, \quad X = B/(G^2 + B^2) = B/Y^2. \quad (3.13)$$

Аналогічно з умови $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ знаходимо:

$$G = R/Z^2, \quad B = X/Z^2, \quad Z^2 = R^2 + X^2. \quad (3.14)$$

Згідно з (3.10), (3.11) для знаходження повної, активної та реактивної потужностей потрібно знайти амплітуди або діючі значення напруги й струму, а також зсув фаз між ними. Всі ці величини є в комплексних амплітудах. Тому викликає питання: як знаходити потужності, знаючи комплексні амплітуди? Для цього вводиться поняття *комплексної потужності*

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* / 2 = U_m I_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} / 2 = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = R + jQ,$$

де $\underline{I} = I_m e^{-j\varphi_i}$ – комплексно спряжена амплітуда струму. Як бачимо, модуль комплексної потужності дорівнює повній потужності, а дійсна та уявна частини – активній та реактивній потужностям.

КМ 3.3. Виконати завдання 4 з підрозділу 2.4.1.

3.2.2. Схемні елементи в режимі гармонічних коливань

Розглянемо амплітудно-фазові співвідношення в окремих схемних елементах. Миттєві струми та напруги в них пов'язані елементними рівняннями. Нехай $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$. Тоді:

$$u_R = RI_m \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_i),$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) / \omega C = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi_i - \pi/2),$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t + \varphi_i) = U_{Lm} \cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2),$$

де $U_{Rm} = RI_m$, $U_{Cm} = I_m / \omega C$, $U_{Lm} = \omega LI_m$.

На рис. 3.8, а зображено осцилограми струму, напруги та миттєвої потужності в опорі, а на рис. 3.8, б – векторна діаграма. Як видно, в опорі струм і напруга синфазні, а миттєва потужність від'ємна. Це означає, що опір лише споживає енергію.

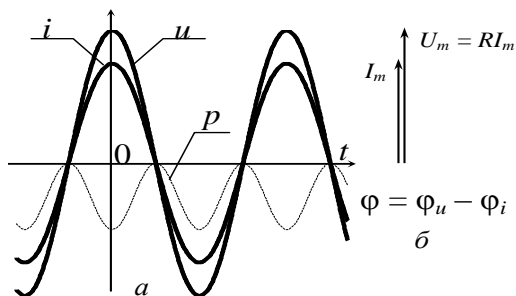


Рис. 3.8

На рис. 3.9, *a* показано осцилограми струму, напруги і миттєвої потужності для ємності, а на рис. 3.9, *б* – векторна діаграма, з яких випливає, що в ємності струм випереджає по фазі напругу на $\pi/2$, а миттєва потужність змінює знак кожні чверть періоду. Коли вона додатна, енергія віддається ємністю, а коли від’ємна – споживається; отже, має місце енергетичний обмін між ємністю та колом. Інтенсивність такого обміну характеризується реактивною потужністю, що дорівнює амплітуді миттєвої потужності.

Осцилограми для індуктивності показано на рис. 3.10. Відмінність порівняно з ємністю полягає в тому, що напруга випереджає струм по фазі на $\pi/2$, як показано на векторній діаграмі (рис. 3.10, *б*). Миттєва потужність також змінює знак кожну чверть періоду, що свідчить про обмін енергією між індуктивністю і рештою кола.

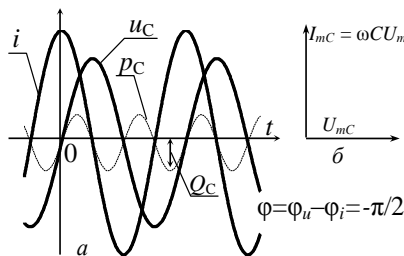


Рис. 3.9

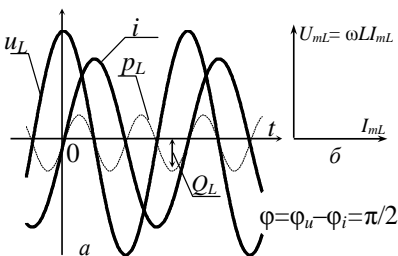


Рис. 3.10

Запишемо комплексні амплітуди струму та напруг схемних елементів:

$$\underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}, \quad \underline{U}_R = U_{Rm} e^{j\varphi_i} = R I_m e^{j\varphi_i}, \quad \underline{U}_C = U_{Cm} e^{j(\varphi_i - \pi/2)} = -j I_m e^{j\varphi_i} / \omega C,$$

$\underline{U}_L = U_{Lm} e^{j(\varphi_i + \pi/2)} = j\omega L I_m e^{j\varphi_i}$, маючи які, знаходимо комплексні опори елементів:

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_C = -j1/\omega C = 1/j\omega C, \quad \underline{Z}_L = j\omega L.$$

Далі знаходимо повні опори:

$$Z_R = R, \quad Z_C = 1/\omega C, \quad Z_L = \omega L.$$

Активний опір резистивного елемента дорівнює R , а реактивних елементів — нулю. Реактивні ж опори елементів

$$X_R = 0, \quad X_C = -1/\omega C, \quad X_L = \omega L.$$

Аналогічно знаходимо:
комплексні провідності

$$\underline{Y}_R = 1/R = G, \quad \underline{Y}_C = j\omega C, \quad \underline{Y}_L = -j1/\omega L = 1/j\omega L;$$

повні провідності

$$Y_R = G, \quad Y_C = \omega C, \quad Y_L = 1/\omega L;$$

активні провідності

$$G_R = G, \quad G_L = 0, \quad G_C = 0;$$

реактивні провідності

$$B_R = 0, \quad B_C = \omega C, \quad B_L = -1/\omega L.$$

Комплексні потужності схемних елементів:

$$\underline{S}_R = \underline{U}_R \underline{I}^*/2 = U_R I, \quad \underline{S}_C = \underline{U}_C \underline{I}^*/2 = -jU_C I, \quad \underline{S}_L = \underline{U}_L \underline{I}^*/2 = jU_L I, \quad (3.15)$$

де U_R, U_C, U_L, I — дійсні значення напруг та струму. Із (3.15) знаходимо:

$$\text{повні потужності} \quad S_R = U_R I = R I^2 = G U_R^2, \quad S_C = U_C I = I^2/\omega C = \omega C U_C^2, \\ S_L = U_L I = \omega L I^2 = U_L^2/\omega L;$$

$$\text{активні потужності:} \quad P_R = S_R, \quad P_C = 0, \quad P_L = 0;$$

$$\text{реактивні потужності} \quad Q_R = 0, \quad Q_C = -S_C, \quad Q_L = S_L.$$

КМ 3.4. Виконати завдання 1 з підрозділу 2.4.1.

Приклад 3.6. До котушки приклали гармонічну напругу з амплітудою $U_m = 10$ В і частотою $f = 100$ кГц і виміряли амплітуду струму в ній $I_m = 10$ мА та зсув фаз між напругою та струмом $\varphi = 85^\circ$. Потрібно скласти схему заміщення котушки та визначити її параметри.

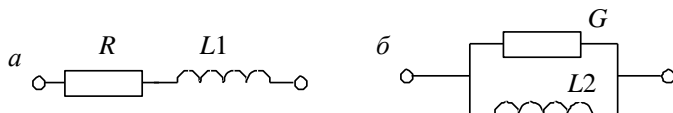


Рис. 3.11

Розв'язання. Знаходимо повний опір $Z = U_m / I_m = 1$ кОм, активну $R = Z \cos \varphi = 87,2$ Ом та реактивну $X = Z \sin \varphi = 996,2$ Ом складові комплексного опору $\underline{Z} = R + jX$, який відповідає послідовному з'єднанню елементів R, L_1 (рис. 3.11, а), причому $L = X / \omega = 1,59$ мГн.

Можлива й інша — паралельна схема заміщення, до якої приходимо, визначивши повну $Y = I_m / U_m = 1$ мСім, активну $G = Y \cos \varphi = 87,2$ мкСім та реактивну $B = -Y \sin \varphi = -996,2$ мкСім провідності. Оскільки $B_L = -1 / \omega L$, паралельна схема заміщення (рис. 3.11, б) має такі параметри: $G = 87,2$ мкСім, $L_2 = 1 / \omega B = 1,6$ мГн.

Приклад 3.7. У попередньому прикладі були визначені параметри двох схем заміщення котушки. Як пов'язані між собою параметри цих схем?

Розв'язання. Враховуючи, що $X = \omega L_1$, $B = 1 / \omega L_2$, маємо згідно з (3.14) $L_1 / L_2 = (X / Z)^2$, отже $L_1 \neq L_2$. Таким чином, якщо вказуються параметри котушки або конденсатора, потрібно обумовити, до якої схеми заміщення вони належать.

КМ 3.5. Виконати завдання 2 з підрозділу 2.4.1 для послідовного R1L1-кола. За формулами (3.14) розрахувати параметри еквівалентної паралельної схеми. Перемикачами S1 і S3 у схемі (рис. 3.24) утворити паралельну еквівалентну схему. Довести її еквівалентність, вимірявши амплітуди струму і напруги, а також зсув фаз між ними в обох схемах.

Приклад 3.8. У колі (рис. 3.12) визначити напруги на реактивних елементах $u_L(t)$, $u_C(t)$. Відомо, що $e(t) = 9\sqrt{2}\cos(\omega t - 10^\circ)$, мА. Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг кола. Числові значення елементів схеми наступні: $R = 3$ кОм, $X_L = 5$ кОм, $X_C = 8$ кОм.

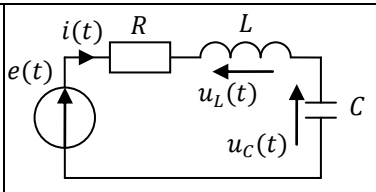


Рис. 3.12

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опори — кОм, провідності — мСім, струм — мА, напруга — В, частота — рад/мкс.

Комплексні опори індуктивності та ємності

$$Z_L = j\omega L = jX_L = jX_1; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C = -jX_2.$$

Вхідний опір кола (рис. 2.9 а)

$$Z = R + jX_1 - jX_2 = 3 + 5j - 8j = 3 - 3j = 3\sqrt{2}e^{-45^\circ j}.$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E} = 9\sqrt{2}e^{-10^\circ j}, \text{ В.}$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{9\sqrt{2}e^{-10^\circ j}}{3\sqrt{2}e^{45^\circ j}} = 3e^{-55^\circ j}$$

За законом Ома

$$U_L = Z_L \cdot \dot{I} = 5e^{90^\circ j} \cdot 3e^{-55^\circ j} = 15e^{35^\circ j};$$

$$U_C = Z_C \cdot \dot{I} = 8e^{-90^\circ j} \cdot 3e^{-55^\circ j} = 24e^{-145^\circ j};$$

Вирази напруги

$$u_L(t) = 15 \cos(\omega t + 35^\circ) \text{ В;}$$

$$u_C(t) = 24 \cos(\omega t - 145^\circ) \text{ В.}$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 3.13).

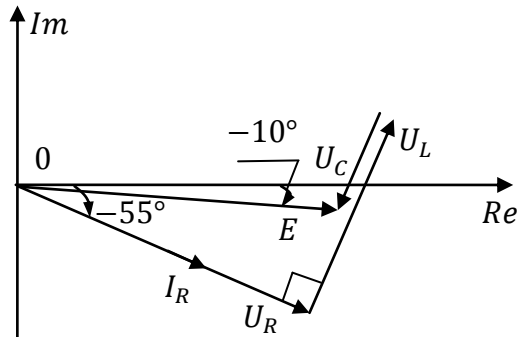


Рис. 3.13

Відповідь: $u_L(t) = 15 \cos(\omega t + 35^\circ) \text{ В}$, $u_C(t) = 24 \cos(\omega t - 145^\circ) \text{ В}$.

Приклад 3.9. У колі (рис. 3.14) визначити вираз струму $j(t)$. Гармонічне джерело напруги $e(t) = 2\sqrt{2} \cos(\omega t + 20^\circ)$ В. Якісно побудувати векторну діаграму струмів та напруг. Числові значення: опори в кОм, провідності в мСім.

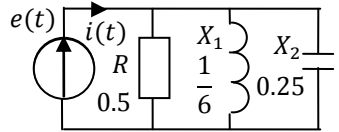


Рис. 3.14

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опори – кОм, провідності – мСім, струм – мА, напруга – В, частота – рад/мкс.

Комплексні провідності ємності та індуктивності

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{-jX_2} = \frac{1}{-j0.25} = 4j \text{ мСім};$$

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{jX_1} = \frac{1}{j1/6} = -6j \text{ мСім}.$$

Вхідна провідність кола (рис. 2.24)

$$Y = g + Y_C + Y_L = 2 + 4j - 6j = 2 - 2j = 2\sqrt{2}e^{-45^\circ j} \text{ мСім}.$$

Комплексна амплітуда напруги

$$\dot{E} = 2\sqrt{2}e^{20^\circ j} \text{ В}.$$

Закон Ома для комплексних амплітуд

$$\dot{j} = \dot{E} \cdot Y = 2\sqrt{2}e^{20^\circ j} \cdot 2\sqrt{2}e^{-45^\circ j} = 8e^{-25^\circ j}$$

Вираз струму

$$j(t) = 8 \cos(\omega t - 25^\circ) \text{ мА}.$$

Якісно побудуємо векторну діаграму струмів та напруг (рис. 3.15).

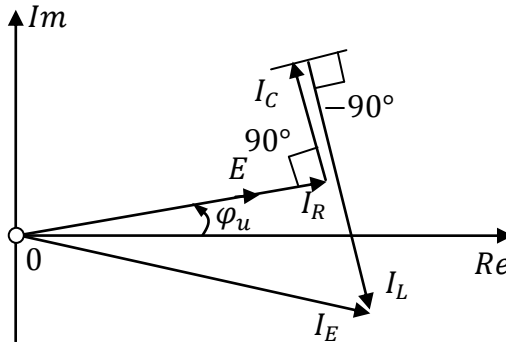


Рис. 3.15

Відповідь: $j(t) = 24 \cos(\omega t + 35^\circ) \text{ мА}.$

3.2.3. Закони Кірхгофа та Ома в комплексній формі

У режимі гармонічних коливань для законів Кірхгофа маємо:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \xleftrightarrow{S} \sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (3.16)$$

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0 \xleftrightarrow{S} \sum_{k=1}^n U_k = 0. \quad (3.17)$$

Крім того, для довільного двополюсника

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}. \quad (3.18)$$

Вирази (3.16–3.18) називаються *законами Кірхгофа та Ома у комплексній формі*. Вони мають такий самий вигляд, як і для постійних струмів і напруг. Отже, рівняння для режимів гармонічних струмів можна складати за тими самими правилами, що й для режимів постійних струмів, якщо оперувати комплексними опорами, провідностями, струмами та напругами.

Приклад 3.10. У колі (рис. 3.16) визначити гармонічні струми у гілках на такій частоті $\omega = 10^6$ рад/с. Числові значення елементів кола такі: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн. Джерело напруги має значення $e(t) = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ)$ В.

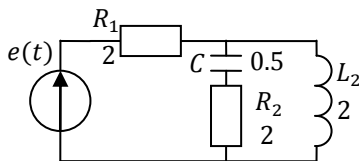


Рис. 3.16

Розв'язання

Комплексні опори реактивних елементів

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 1 \cdot 2 = 2j = 2e^{j90^\circ}; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 0.5} = -2j = 2e^{-j90^\circ}.$$

Загальний вхідний опір кола:

$$Z_{12} = \frac{Z_L(R_2 + Z_C)}{Z_L + R_2 + Z_C} = \frac{2j \cdot (2 - 2j)}{2j + 2 - 2j} = j(2 - 2j) = 2 + 2j = 2\sqrt{2}e^{j45^\circ}.$$

$$Z_{BX} = R_1 + Z_{12} = 2 + 2 + 2j = 4 + 2j = \sqrt{20}e^{j27^\circ}.$$

Напруга у вигляді комплексної амплітуди

$$\dot{E} = 10\sqrt{2}e^{j90^\circ}.$$

Струм за законом Ома

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{Z_{BX}} = \frac{10\sqrt{2}e^{j90^\circ}}{\sqrt{20}e^{j27^\circ}} = \sqrt{10}e^{j63^\circ} \text{ мА.}$$

Гармонічний струм

$$i_1(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 63^\circ) \text{ мА.}$$

Струм та напругу на індуктивності за законом Ома

$$\dot{U}_L = i_1 Z_{12} = 2\sqrt{10}e^{j63^\circ} \cdot 2\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 4\sqrt{5}e^{j108^\circ};$$

$$i_L = \frac{\dot{U}_L}{Z_L} = \frac{4\sqrt{5}e^{j108^\circ}}{2e^{j90^\circ}} = 2\sqrt{5}e^{j18^\circ}.$$

Гармонічний струм на індуктивності

$$i_L(t) = 2\sqrt{5} \cos(\omega t + 18^\circ) \text{ мА.}$$

Струм у другій гілці

$$I_C = \frac{\dot{U}_L}{R_1 + Z_C} = \frac{4\sqrt{5}e^{j108^\circ}}{2 - 2j} = \frac{4\sqrt{5}e^{j108^\circ}}{2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = \sqrt{10}e^{j153^\circ}.$$

Гармонічний струму

$$i_C(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 153^\circ) \text{ мА.}$$

Відповідь: $i_C(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 153^\circ)$, $i_L(t) = 2\sqrt{5} \cos(\omega t + 18^\circ)$ мА,
 $i_1(t) = \sqrt{10} \cos(\omega t + 63^\circ)$ мА.

3.2.4. Добротності реактивних компонентів

Реальні реактивні компоненти – котушки і конденсатори – відрізняються від ідеальних елементів індуктивності та ємності тим, що в них втрачається енергія або, інакше кажучи, активна потужність в них не дорівнює нулю. Згідно з (3.11) активна потужність дорівнює нулю, якщо зсув фаз між напругою і струмом $\varphi = \pi/2$. Якщо ж $\varphi < \pi/2$, то $P \neq 0$. При цьому двополюсник може мати схеми заміщення послідовну (див. рис. 3.6) або паралельну (див. рис. 3.7). Зазвичай котушку моделюють послідовною, а конденсатор – паралельною схемами заміщення. Як оцінити ступінь наближення реактивних компонентів до ідеальних елементів? Очевидно, реактивний компонент тим кращий, чим менші втрати енергії в ньому, отже, чим менший кут $\beta = \pi/2 - \varphi$, який називають *кутом втрат* (див. рис. 3.17).

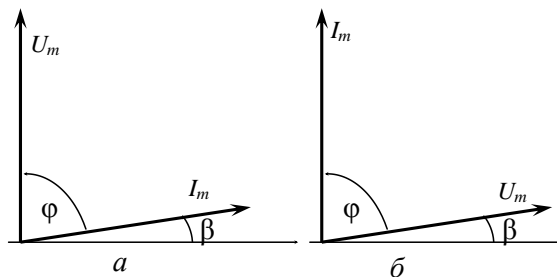


Рис. 3.17

Оцінюють якість реактивного компонента параметром

$$Q = \operatorname{tg} \varphi = 1 / \operatorname{tg} \beta ,$$

який називають *добротністю*. З векторних діаграм (див. рис. 3.6 і 3.7) випливає, що для послідовної схеми заміщення

$$Q = X/R,$$

а для паралельної

$$Q = B/G.$$

Наприклад, якщо котушку моделювати послідовною схемою, то

$$Q = \omega X / R. \quad (3.19)$$

Поняттю добротності можна надати певного фізичного смислу, якщо перетворити вираз (3.19) таким чином:

$$Q_L = \omega L I^2 / R I^2 = 2\pi 0,5 L I_m^2 / T R I^2 = 2\pi W_{Lm} / W_R,$$

де W_{lm} — енергія магнітного поля котушки при амплітудному значенні струму, W_R — енергія, що втрачається в котушці за один період. Аналогічного висновку можна дійти щодо конденсатора, модельованого паралельною схемою:

$$Q_C = \omega C / G = \omega C U^2 / G U^2 = 2\pi 0,5 C U_m^2 / T G U^2 = 2\pi W_{Cm} / W_G,$$

де W_{Cm} — енергія, що накопичується в конденсаторі, W_G — енергія, що втрачається за один період.

Приклад 3.11. У колі (рис. 3.18) на відомій частоті ω знайти опори R та X_L , коефіцієнт потужності K_P . Добротність гілки на цій частоті дорівнює $\sqrt{7}$. Показання приладів є $U_V = 40$ В та $I_A = 5$ мА.

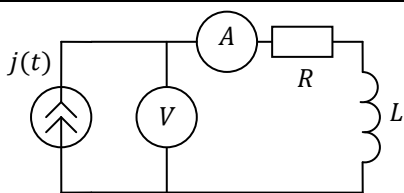


Рис. 3.18

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: індуктивність – мГн, опір – кОм, частота – МГц, потужність – мВт, .

Добротність гілки

$$Q_X = \frac{Q_L}{P_R} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R}.$$

Індуктивний опір

$$X_L = R \cdot Q_X = \sqrt{7}R.$$

Модуль вхідного опору

$$|Z| = \frac{U_V}{I_A} = \frac{40}{5} = 8 \text{ кОм}.$$

Опір гілки та її модуль

$$Z = R + jX_L, \rightarrow |Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}.$$

Модуль опора гілки

$$8 = \sqrt{(\sqrt{7}R)^2 + R^2} = \sqrt{8R^2} = 2R\sqrt{2}.$$

Звідси визначимо активний опір

$$R = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ кОм}.$$

Реактивний опір індуктивності

$$X_L = \sqrt{7}R = 2\sqrt{14} \text{ кОм}.$$

Активна та повна потужності

$$P = I_A^2 \cdot R = 5^2 \cdot 2\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \text{ мВт};$$

$$|S| = I_A \cdot U_V = 5 \cdot 40 = 200 \text{ мВА};$$

Коефіцієнт потужності із трикутника потужностей (рис. 3.19)

$$K_P = \cos \varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{50\sqrt{2}}{200} = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.354.$$

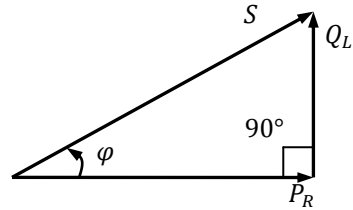


Рисунок 3.19

Відповідь: $R = 2\sqrt{2} \text{ кОм}, X_L = 2\sqrt{14} \text{ кОм}, K_P = 0.354.$

3.2.5. Узгодження навантаження в режимі гармонічних коливань

Розглянемо питання узгодження навантаження із джерелом у режимі гармонічних коливань з метою одержання максимальної активної потужності. На рис. 3.20 R_H, R_{BH} — активні, а X_H та X_{BH} — реактивні опори навантаження та джерела.

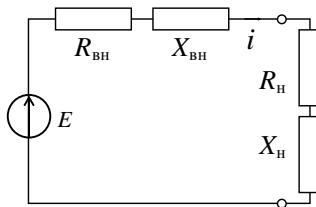


Рис. 3.20

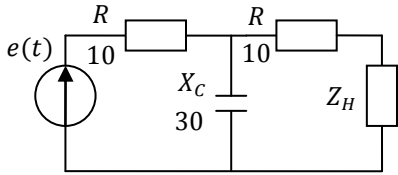
Знаходимо амплітуду струму $I_m = E_m / \sqrt{(R_H + R_{BH})^2 + (X_H + X_{BH})^2}$.

Якщо реактивну складову навантаження вибрати так, щоб $X_H = -X_{BH}$, то одержимо $I_m = E_m / (R_H + R_{BH})$. Тоді активна потужність

$$P = R_H I^2 = E^2 R_H / (R_H + R_{BH})^2, \quad (3.26)$$

де I, E — діючі значення. Вираз (3.26) збігається з (3.12). Тому умовою одержання максимальної потужності є $R_H = R_{BH}$, що можна об'єднати з умовою

$X_H = -X_{BH}$ як $R_H + jX_H = R_{BH} - jX_{BH}$ або ж $Z_H = Z_{BH}$. Отже, умовою узгодження в режимі гармонічних струмів є рівність комплексного опору навантаження і комплексно спряженого внутрішнього опору джерела.

<p>Приклад 3.11. У колі (рис. 3.21) визначити при якому опорі навантаження Z_H на ньому виділиться максимальна потужність та обчислити її. Числові значення елементів кіл: $R = 10$ кОм, $X_C = 30$ кОм, $E_d = 80$ В.</p>	 <p style="text-align: right;">Рисунок 3.21</p>
--	---

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, напруга – В, активна потужність – мВт.

У колі (рис. 3.21) від'єднаємо гілку із опором Z_H та представимо схему у вигляді еквівалентного генератора із параметрами \dot{E}_{EG} та Z_{EG} (рис. 3.22 в).

Напруга холостого ходу (рис. 3.22 а)

$$\begin{aligned}
 U_{XX} &= U_C = I \cdot Z_C = I \cdot (-jX_C) = \frac{\dot{E}}{R - jX_C} X_C e^{-j90^\circ} = \\
 &= \frac{80}{10 - j30} \cdot 30 e^{-j90^\circ} = 72 - 24j \approx 76 e^{-j18.5^\circ} \text{ В.}
 \end{aligned}$$

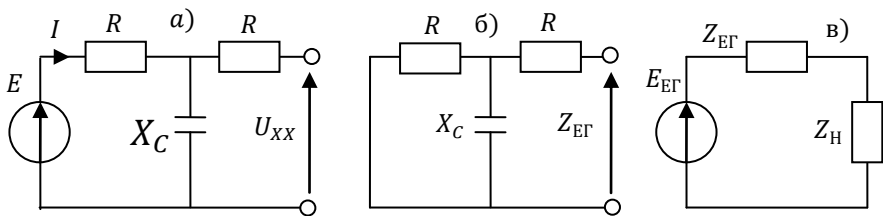


Рисунок 3.22

У колі (рис. 3.22 а) замінимо джерело його внутрішнім опором, тобто закороткою (рис. 3.22 б) і визначимо опір еквівалентного генератора

$$\begin{aligned}
 Z_{EG} &= R + \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = R + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = 10 + \frac{10 \cdot (-j30)}{10 - j30} = \\
 &= 19 - 3j = 19.23 e^{-j8.9^\circ} \text{ кОм.}
 \end{aligned}$$

У навантаженні (рис. 3.22 в) виділиться максимальна потужність за умови

$$Z_H = Z_{EG}^* = 19 + 3j \text{ кОм.}$$

При цьому максимальна потужність становить

$$P_{max} = \frac{E_D^2}{4R_H} = \frac{76^2}{4 \cdot 19} = 76 \text{ мВт.}$$

Відповідь: $Z_H = 19 + 3j$ Ом, $P_{max} = 76$ мВт.

3.3. Кола зі взаємними індуктивностями

3.3.1. Варіометр

Аналіз кіл із взаємними індуктивностями має певні особливості, які розглянемо на прикладі таких пристроїв, як варіометр і трансформатор.

Розглянемо котушки, що мають спільний магнітний потік. Напрямок потоку залежить від напрямку струму. Коли струми спрямовані однаково відносно виводів котушки так, що їх магнітні потоки збігаються, тоді ці виводи називають однойменними й позначають крапками. *Варіометр* являє собою дві послідовно з'єднані котушки, одна з яких може обертатися відносно іншої. При цьому взаємна індуктивність змінюється від $+M$, коли напрямки магнітних потоків котушок збігаються, до $-M$ при повороті котушки на 180° , коли магнітні потоки напрямлені зустрічно. В яких межах змінюється еквівалентна індуктивність варіометра L_e , якщо його котушки мають індуктивності L_1 та L_2 ?

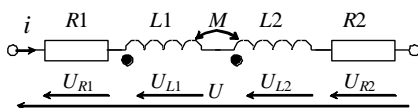


Рис. 3.23

Зобразимо кожну з котушок послідовною схемою заміщення (рис. 3.23) та складемо повну систему рівнянь: $u = u_{R1} + u_{L1} + u_{R2} + u_{L2}$, $u_{R1} = R_1 i$, $u_{R2} = R_2 i$, $u_{L1} = L_1 i' + M i'$, $u_{L2} = L_2 i' + M i'$, звідки випливає $u = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)i' = R_e i + L_{e1} i'$, де $L_{e1} = L_1 + L_2 + 2M$. При повороті котушки на 180° взаємна індуктивність змінить знак і еквівалентна індуктивність становитиме $L_{e2} = L_1 + L_2 - 2M$. Отже, індуктивність варіометра змінюється від L_{e1} до L_{e2} на величину $\Delta L = L_{e1} - L_{e2} = 4M$.

3.3.2. Ідеальний і реальний трансформатори

Для моделювання такого пристрою, як трансформатор, потрібно ввести новий схемний елемент – *ідеальний трансформатор*, що описується елементними рівняннями

$$\underline{U}_2 = n\underline{U}_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1/n, \quad (5.20)$$

де n є коефіцієнтом трансформації. Умовне зображення ідеального трансформатора показано на рис. 3.24. З рівнянь (3.20) випливає

$$\begin{aligned} \underline{S}_2 &= \underline{U}_2 \underline{I}_2^*/2 = n\underline{U}_1 \underline{I}_1^*/2n = \underline{S}_1, \\ \underline{Z}_{\text{вх}} &= \underline{U}_1/\underline{I}_1 = \underline{U}_2/n^2 \underline{I}_2 = \underline{Z}_{\text{н}}/n^2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

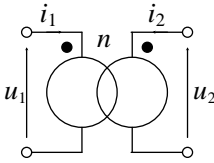


Рис. 3.24

де $\underline{Z}_{\text{н}} = \underline{U}_2/\underline{I}_2$ — опір навантаження. Отже, трансформатор трансформує опір $\underline{Z}_{\text{н}}$ у $\underline{Z}_{\text{вх}}$ згідно з (3.21). При цьому потужності у вихідному та вхідному колах рівні. Ці властивості визначають сферу застосування трансформаторів, а саме для узгодження навантажень із джерелами.

Розглянемо властивості реальних трансформаторів, їх схеми заміщення та основні принципи конструювання. Трансформатор складається із двох або більше котушок – обмоток, що мають спільний магнітний потік. Замінивши кожну з обмоток послідовним з'єднанням елементів L та R , одержимо схему заміщення (рис. 3.25). Складаємо систему рівнянь:

$u_{R1} + u_{L1} = u_1$, $u_2 + u_{R2} + u_{L2} = 0$, $u_{R1} = R_1 i_1$, $u_{R2} = R_2 i_2$, $u_{L1} = L_1 i_1' - M i_2'$, $u_{L2} = L_2 i_2' - M i_1'$, яка зводиться до двох рівнянь, що визначають залежності поміж напругами та струмами на вході та виході трансформатора:

$$R_1 i_1 + L_1 i_1' - M i_2' = u_1, \quad u_2 + L_2 i_2' + R_2 i_2 - M i_1' = 0. \quad (3.22)$$

Переходимо до комплексних амплітуд, тоді одержимо

$$(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{U}_1, \quad -j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_{\text{н}})\underline{I}_2 = 0. \quad (3.23)$$

Зводимо систему рівнянь до такого вигляду:

$$\begin{aligned} [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\underline{I}_1 + j\omega M(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) &= \underline{U}_1, \\ -j\omega M(\underline{I}_1 - \underline{I}_2) + [R_2 + j\omega(L_2 - M) + \underline{Z}_{\text{н}}]\underline{I}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Цим рівнянням відповідає схема (рис. 3.26), яка еквівалентна схемі, зображеній на рис. 3.25, внаслідок еквівалентності рівнянь (3.23) та (3.24). Таке еквівалентне перетворення схем із взаємними індуктивностями у схеми, що їх не мають, називається *розв'язанням магнітних зв'язків*.

Схема, показана на рис. 3.26, зручна для аналізу роботи трансформатора, але за цією схемою важко встановити зв'язок її параметрів з конструктивними параметрами трансформатора. Тому розглянемо ще одну схему заміщення. Магнітний потік, зумовлений струмом i_1 у першій обмотці, складається із двох частин: потоку Φ_{21} , який перетинає витки як першої, так і другої обмотки, та потоку розсіювання Φ_{1s} , який перетинає витки тільки першої обмотки.

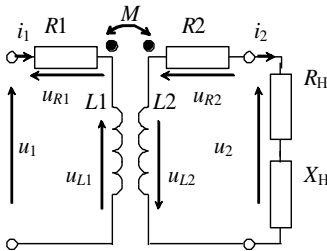


Рис. 3.25

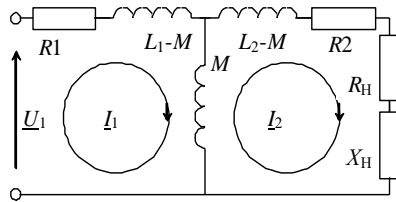


Рис. 3.26

Магнітний потік струму i_2 теж складається із двох частин — Φ_{12} та Φ_{2s} . Повні магнітні потоки обмоток дорівнюють:

$$\Phi_1 = \Phi_{1s} + \Phi_{21} - \Phi_{12} = \Phi_{1s} + \Phi_0, \quad \Phi_2 = \Phi_{2s} + \Phi_{12} - \Phi_{21} = \Phi_{2s} - \Phi_0,$$

де спільний потік $\Phi_0 = \Phi_{21} - \Phi_{12}$ називається *потокотом намагнічування*. Потокотозчеплення обмоток знаходять як

$$\Psi_1 = W_1 \Phi_1 = \Psi_{1s} + \Psi_0, \quad \Psi_2 = W_2 \Phi_2 = \Psi_{2s} - n \Psi_0, \quad (3.25)$$

де W_1 , W_2 — кількості витків обмоток, $n = W_2/W_1$, $\Psi_0 = W_1 \Phi_0$, $\Psi_{1s} = W_1 \Phi_{1s}$, $\Psi_{2s} = W_2 \Phi_{2s}$. Потокотозчеплення розсіювання пропорційні (для лінійних магнітних середовищ) струмам в обмотках: $\Psi_{1s} = L_{1s} i_1$, $\Psi_{2s} = L_{2s} i_2$, де L_{1s} , L_{2s} — *індуктивності розсіювання*. Потокотозчеплення намагнічування обумовлене струмами в обох обмотках. Покладемо, що воно пропорційне деякому еквівалентному струмові, який називається намагнічувальним, а саме $\Psi_0 = L_0 i_0$. Тоді рівняння (3.25) зводиться до вигляду: $\Psi_1 = L_{1s} i_1 + L_0 i_0$, $\Psi_2 = L_{2s} i_2 - n L_0 i_0$. За-

мінівши трансформатор схемою (див. рис. 3.25) та покладаючи в (3.22) $u_{L1} = d\Psi_1/dt = L_{1S}i'_1 + L_0i'_0$, $u_{L2} = d\Psi_2/dt = L_{2S}i'_2 - nL_0i'_0$, одержимо таку систему рівнянь:

$$(R_1 + j\omega L_{1S})I_1 + j\omega L_0 I_0 = \underline{U}_1, \quad -j\omega n L_0 I_0 + (R_2 + j\omega L_{2S} + \underline{Z}_n)I_2 = 0.$$

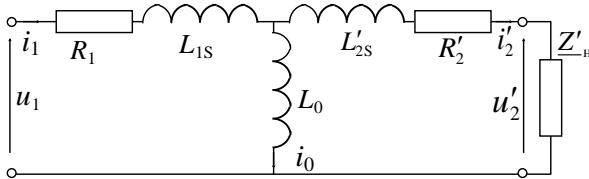


Рис. 3.27

Перетворимо друге рівняння до вигляду

$$-j\omega L_0 I_0 + (R'_2 + j\omega L'_{1S} + \underline{Z}'_n)I'_2 = 0,$$

де $R'_2 = R_2/n^2$, $L'_{2S} = L_{2S}/n^2$, $\underline{Z}'_n = \underline{Z}_n/n^2$, $I'_2 = nI_2$ — зведені параметри та струм вторинної обмотки. Цим рівнянням відповідає схема, зображена на рис. 5.19, яка називається *схемою трансформатора, зведеною до первинної обмотки*. Щоб одержати схему, що має на виході напругу \underline{U}_2 та струм \underline{I}_2 в навантаженні \underline{Z}_n , треба у схему (рис. 3.27) ввімкнути ідеальний трансформатор з коефіцієнтом трансформації n (див. рис. 3.28). Частина цієї схеми, що розташована ліворуч від ідеального трансформатора, моделює неідеальність реального трансформатора. Аналізуючи цю схему, можна сформулювати вимоги до конструкції реальних трансформаторів, що наближають їх до ідеальних.

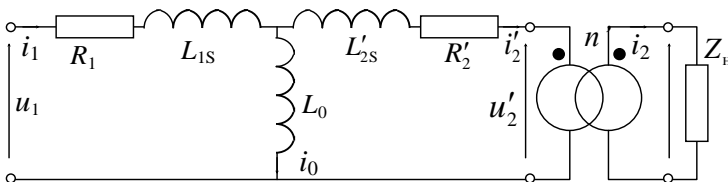


Рис. 3.28

По-перше, потрібно намагатися зменшити потоки розсіювання та втрати. Справді, якщо у схемі (рис. 3.28) $R_1 = R'_2 = 0$ та $L_{1S} = L'_{2S} = 0$, одержимо

$\underline{U}'_2 = \underline{U}_1$, а отже, $\underline{U}_2 = n\underline{U}_1$ як у ідеального трансформатора. По-друге, слід збільшувати індуктивності обмоток, а разом з тим і L_0 . Якщо $\omega L_0 \rightarrow \infty$, $\underline{I}'_2 = \underline{I}_1$, $\underline{I}_2 = \underline{I}_1/n$, що відповідає ідеальному трансформаторові. Перелічені вимоги є суперечними. Наприклад, для збільшення індуктивності потрібно збільшувати кількість витків, що суперечить вимозі зменшення втрат. Тому оптимізація конструкції трансформатора, як і інших технічних пристроїв, є одним із найважливіших завдань інженерної творчості.

КМ 3.9. Виконати завдання 2 з підрозділу 2.4.3.

3.4. Комп'ютерне моделювання

3.4.1. Амплітудно-фазові співвідношення в режимі гармонічних коливань

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- амплітудно-фазових співвідношень у схемних елементах;
- амплітудно-фазових співвідношень у схемах з послідовним і паралельним з'єднанням елементів;
- схем заміщення пасивних двополюсників у режимі гармонічних коливань.

1. Дослідити амплітудно-фазові співвідношення у схемних елементах, склавши схему, показану на рис. 3.29. Встановити параметри елементів у схемі (див. рис. 3.29), згідно з варіантом за табл. 3.1. За допомогою перемикачів S1, S2, S3 підключити по черзі елементи R, L, C до генератора гармонічної напруги.

Таблиця 3.1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C, нФ	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
L, мГн	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
R, кОм	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5

Зауваження: всі прилади у цій роботі треба встановити в режим вимірювання змінних струмів (АС).

Дослідити залежність від частоти величини повного опору елемента, а також зсуву фаз між напругою і струмом. Частоту змінювати у межах 1...10 кГц кроками через 1 кГц. Методика вимірювання фазових зсувів, напруги, струму і повного опору описана в підрозд. 2.6.1. Побудувати зняті експериментально графіки залежності повного опору елемента від частоти. На цих самих графіках побудувати частотні залежності повних опорів елементів, розрахованих за формулами

$$Z_L = 2\pi fL, \quad Z_C = \frac{1}{2\pi fC}.$$

Зарисувати осцилограми напруги і струму в кожному елементі. Зробити висновки щодо частотних залежностей опору елемента та фазових зсувів між напругою та струмом.

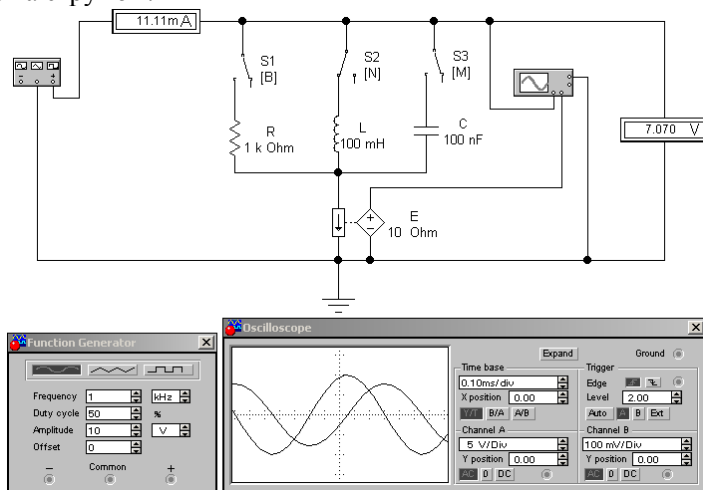


Рис. 3.29

2. Дослідити амплітудно-фазові співвідношення у схемних з'єднаннях елементів, склавши схему, показану на рис. 3.23. Встановити параметри елементів схеми (див. рис. 3.30), згідно з табл. 3.2. На генераторі встановити частоту 1 кГц і амплітуду напруги 10 В. Перемикачами S1, S2, S3 по черзі сформувати послідовні R1R2-, R1L1- і R1C1-кола. У кожному колі виміряти зсув фаз між входною U_{BX} і вихідною $U_{ВХ}$ напругами φ_x , а також амплітуди (діючі значення) струму I і напруги U_{BX} , перемикаючи вольтметр перемикачем S4. За цими да-

ними розрахувати: повний Z , активний R і реактивний X опори; напругу U_R на опорі $R1$, розташованому між входом і виходом, побудувати векторну діаграму струму і напруг на елементах схеми і на виході генератора, а також трикутник опорів.

Вихідна напруга – це напруга на реактивному опорі $U_{\text{вх}} = U_X$. Тоді згідно з векторною діаграмою (див. рис. 3.6, а)

$$U_R = \sqrt{U_{\text{вх}}^2 - U_X^2}.$$

Далі за формулами знаходимо

$$Z = (U_{\text{вх}} / I), \quad R = (U_{\text{вх}} / I) \cos \varphi = U_R / I, \quad X = (U_{\text{вх}} / I) \sin \varphi = U_X / I.$$

У цих формулах зсув фаз між входною напругою і струмом $\varphi = \pi/2 - \varphi_x$ (див. рис. 3.6, а). За розрахованим реактивним опором і заданою частотою розрахувати індуктивність чи ємність досліджуваного кола. Порівняти розраховані величини параметрів схеми із заданими.

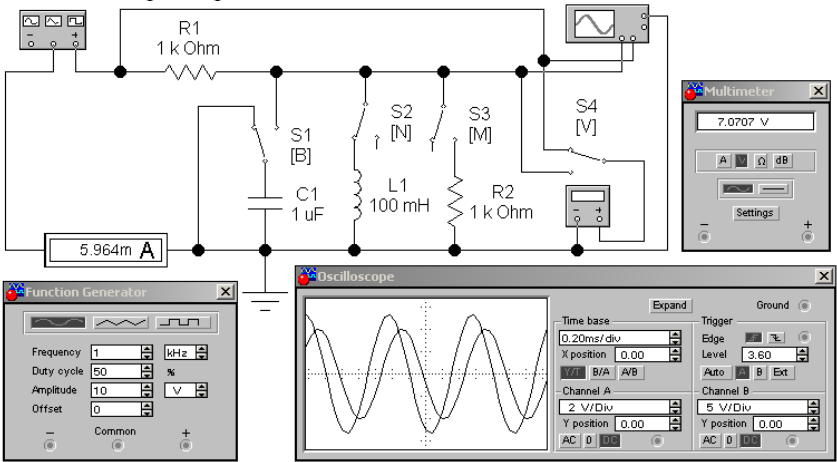


Рис. 3.30

Таблиця 3.2

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C1$, нФ	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
$L1$, мГн	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
$R1, R2$, кОм	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5

3. Дослідити амплітудно-фазові співвідношення у схемних з паралельним з'єднанням елементів, склавши схему, показану на рис. 3.31. Встановити параметри елементів схеми (рис. 3.31), згідно з табл. 3.3. Встановити на генераторі частоту 10 кГц і амплітуду гармонічної напруги 10 В. Перемикачами S1, S2, S3 сформувати по черзі паралельні RC-, RL- та RCL-кола. В кожному із цих кіл виміряти напругу і струм генератора. За даними вимірювань розрахувати повні, активні та реактивні опори і провідності досліджуваних кіл за формулами

$$Z = U_m / I_m, \quad R = (U_m / I_m) \cos \varphi = U_{Rm} / I_m, \quad X = (U_m / I_m) \sin \varphi = U_{Xm} / I_m, \\ Y = I_m / U_m, \quad G = I_m \cos \varphi / U_m = I_{Gm} / U_m, \quad B = I_m \sin \varphi / U_m = I_{Bm} / U_m, \quad (3.27)$$

а також побудувати векторні діаграми цих кіл. За розрахованою реактивною провідністю і заданою частотою обчислити індуктивність чи ємність досліджуваного кола і порівняти з їх величинами, заданими на схемах.

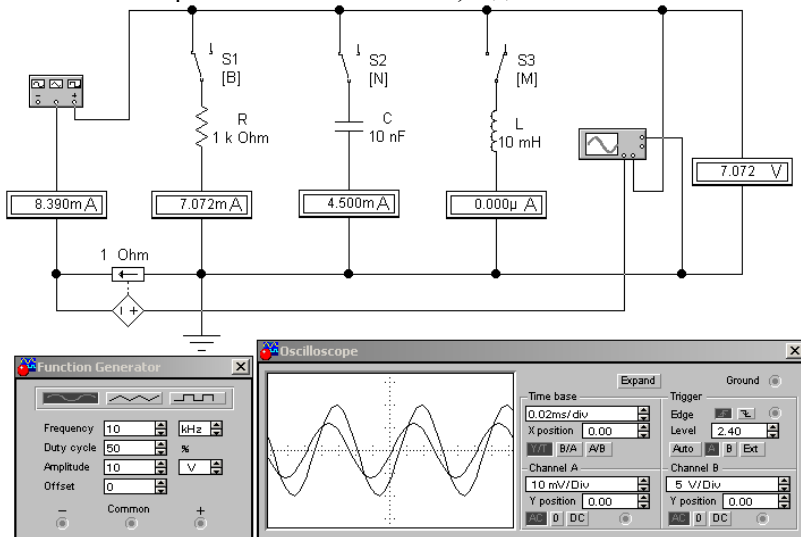


Рис. 3.31

Таблиця 3.3

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C, нФ	5	10	15	20	25	5	10	15	20	25
L, мГн	10	10	10	10	10	20	20	20	20	20
R, кОм	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1

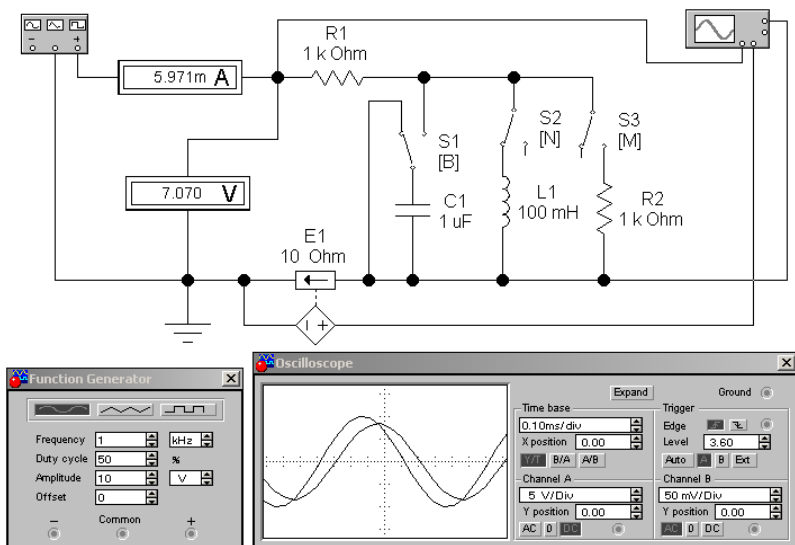


Рис. 3.32

4. Дослідити еквівалентні схеми заміщення пасивних двополіусників у режимі гармонічних коливань. Перемикачами S1, S2, S3 у схемі, зображеній на рис. 3.32, сформувані двополіусники, що складаються з елементів R1, R2, L1 і R1, R2, C1. Параметри елементів схеми наведено в табл. 3.3. Експериментально визначити і розрахувати їх повні, активні і реактивні опори і провідності за формулами (3.27). Для цього виміряти напругу і струм на вході двополіусника, а також зсув фаз між ними. Зсув фаз вимірюється, як у п. 2.6.1. Розрахувати параметри послідовної і паралельної схем заміщення досліджуваних двополіусників. Перемикачами S1, S2, S3 сформувані послідовні схеми заміщення у схемі, зображеній на рис. 3.32, і паралельні схеми заміщення у схемі на рис. 3.31, виставивши розраховані параметри їх елементів. Довести, що утворені схеми еквівалентні вихідним двополіусникам і поміж собою, вимірявши їх повні, активні і реактивні опори.

3.4.2. Енергетичні процеси в режимі гармонічних коливань

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- енергетичних процесів у режимі гармонічних коливань;
- умов узгодження навантаження із джерелом електричної енергії.

1. Дослідити енергетичні процеси у схемних елементах у режимі гармонічних коливань. Скласти схему, зображену на рис. 3.30, встановивши величини параметрів згідно з табл. 3.1. Виміряти напругу і струм у досліджуваному елементі U , I . Звернути увагу, що прилади в режимі гармонічних струмів вимірюють діючі значення струму і напруги (порівняйте амплітудне значення напруги на генераторі і показання вольтметра). Виміряти зсув фаз ϕ між напругою і струмом за методикою, описаною в розділі 2.6.1. Розрахувати повну, активну, реактивну потужності в досліджуваному елементі за формулами

$$S = UI, \quad P = S \cos \phi, \quad Q = S \sin \phi.$$

Перемикачами S1, S2, S3 по черзі підімкнути до генератора двополюсники у вигляді паралельних RC-, RL-, LC-ланцюжків. Виміряти струм і напругу на досліджуваному двополюснику. Розрахувати повну, активну, реактивну потужності в досліджуваному двополюснику за наведеними вище формулами. Побудувати для кожного двополюсника трикутник потужностей. Порівняти активну і реактивну складові потужності двополюсника з активними і реактивними потужностями елементів, що утворюють двополюсник.

2. Вивчити методику узгодження навантаження з генератором у режимі гармонічних коливань, склавши схему, зображену на рис. 3.33.

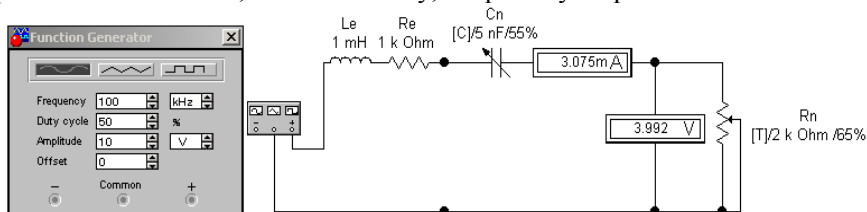


Рис. 3.33

Узгодити навантаження, яке є послідовним з'єднанням опору R_n і ємності C_n , з генератором, що має внутрішню індуктивність $L_e = 1$ мГн і внутрішній опір $R_e = 1$ кОм. Метою узгодження навантаження з генератором є отримання максимальної активної потужності у навантаженні. Для цього потрібно підіб-

рати опір R_n і ємність C_n так, щоб досягти максимальної активної потужності у навантаженні. Настроювання слід вести в такій послідовності. Перестроюючи ємність C_n , вимірювати струм у навантаженні. Побудувати залежність струму I і активної потужності P в навантаженні від величини ємності C_n . Активну потужність розраховувати за формулою

$$P = R_n I^2. \quad (3.28)$$

Встановити величину ємності навантаження, що відповідає максимальній величині потужності. Далі зняти залежність струму і потужності у навантаженні від величини опору R_n навантаження. Потужність розраховувати за формулою (3.28), підставляючи в неї величину зміненого опору і вимірний струм. Потужність у навантаженні також можна розрахувати за формулою

$$P = UI,$$

вимірюючи струм і напругу в навантаженні. Побудувати залежності струму, напруги і потужності від величини опору навантаження. Визначити опір, що відповідає максимальній потужності.

Перевірити, чи виконується теоретично доведена умова узгодження, а саме:

$$R_n = R_e, \quad \omega L_e = \frac{1}{\omega C_n}.$$

Узгодити навантаження з генератором при паралельному з'єднанні опору навантаження з коригуючою ємністю (рис. 3.34). Порівняти величину коригуючої ємності при послідовному (рис. 3.33) і паралельному (рис. 3.34) з'єднаннях. Пояснити отриманий результат.

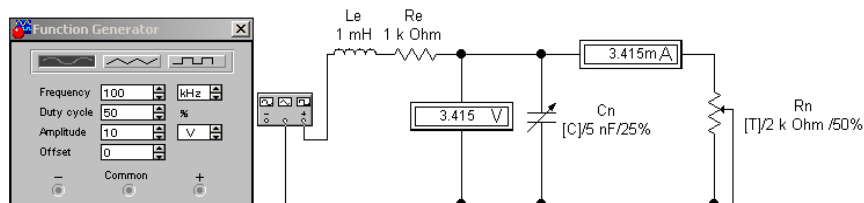


Рис. 3.34

3.4.3. Магнітозв'язані кола

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- властивостей кіл із магнітними зв'язками;
- параметрів пристроїв, дія яких ґрунтується на використанні магнітних зв'язків — таких, як варіометр і трансформатор.

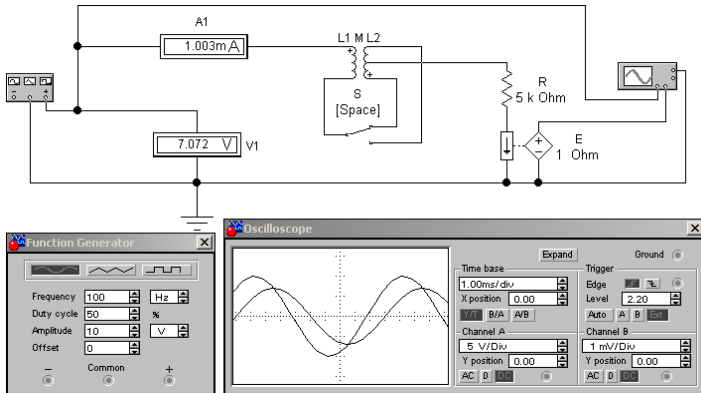


Рис. 3.35

1. Скласти схему (рис. 3.35), в якій обмотки трансформатора L1, L2 ввімкнені як варіометр із взаємною індуктивністю M. Перемикач S перемикає виводи вторинної обмотки, що імітує поворот вторинної обмотки варіометра на 180° , при якому змінюється знак взаємної індуктивності. У схемі, зображеній на рис. 3.35, обмотки ввімкнені так, що їх магнітні потоки складаються, як у схемі на рис. 3.22, і взаємна індуктивність має знак «плюс». У схемі, зображеній на рис. 3.36, магнітні потоки обмоток спрямовані зустрічно, і взаємна індуктивність має знак «мінус».

Дослідити, в яких межах змінюється індуктивність варіометра. Для цього треба подати від генератора змінну напругу із частотою 100 Гц, заміряти вхідну напругу U вольтметром V1, вхідний струм I амперметром A1, а також зсув фаз між напругою і струмом ϕ за допомогою осцилографа (див. розділ 2.6.1, формулу (3.26)). За результатами вимірів розрахувати повний опір, активну і реактивну складові опору:

$$Z = \frac{U}{I}, \quad R = Z \cos \varphi, \quad X = Z \sin \varphi,$$

а також еквівалентну індуктивність

$$L_e = \frac{Z \sin \varphi}{2\pi f}.$$

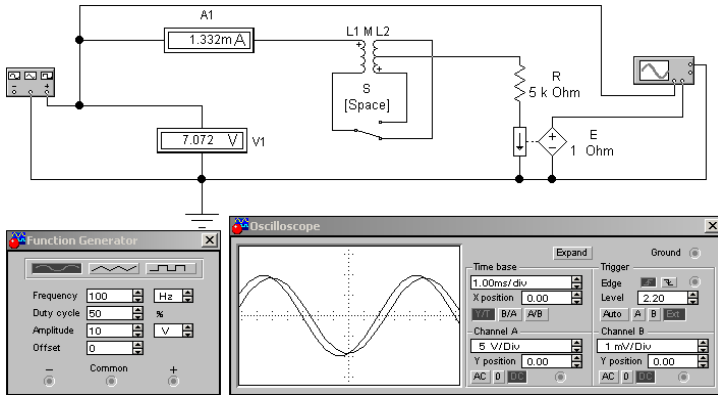


Рис. 3.36

Розрахувати взаємну індуктивність за формулою (див. прикл. 3.11):

$$M = \frac{L_{e1} - L_{e2}}{4},$$

де L_{e1}, L_{e2} — еквівалентні індуктивності, що заміряні при двох положеннях перемикача S. Дослідити, чи змінюється активна складова опору, розрахувавши її при двох положеннях перемикача S. Порівняйте розрахований опір з опором резистора на схемі.

2. У схемі, показаній на рис. 3.30, трансформатор навантажено на опір R. Схема на рис. 3.31 відрізняється тим, що обмотки трансформатора помінялися місцями. Виміряти в обох схемах коефіцієнт трансформації, коефіцієнт передачі потужності, вхідний опір і перевірити, чи виконуються співвідношення (3.20) і (3.21). Визначити параметри трансформатора: індуктивності обмоток і взаємну індуктивність. Для цього встановити на генераторі змінну напругу з амплітудою 10 В і частотою 100 Гц. Перемикачем S відімкнути опір навантаження, реалізувавши режим холостого ходу у вторинній обмот-

ці. Поклавши в рівняннях (3.22) $i_2 = 0$ і перейшовши до комплексних амплітуд, отримаємо

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1, \quad \underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1,$$

звідки знаходимо повний вхідний опір $Z_1 = U_1/I_1$, його активну і реактивну складові:

$$R_1 = Z_1 \cos \varphi, \quad X_1 = \omega L_1 = Z_1 \sin \varphi,$$

а також опір взаємної індуктивності $X_M = \omega M = U_2/I_1$. Із останніх рівнянь виводимо вирази для розрахунку індуктивності первинної обмотки і взаємної індуктивності:

$$L_1 = \frac{Z_1 \sin \varphi}{\omega}, \quad M = \frac{U_2}{\omega I_1}.$$

Отже, для визначення опору й індуктивності первинної обмотки трансформатора, а також взаємної індуктивності потрібно виміряти у схемі, показаній на рис. 3.37, в режимі холостого ходу, напруги первинної і вторинної обмоток, струм первинної обмотки і зсув фаз між напругою і струмом первинної обмотки.

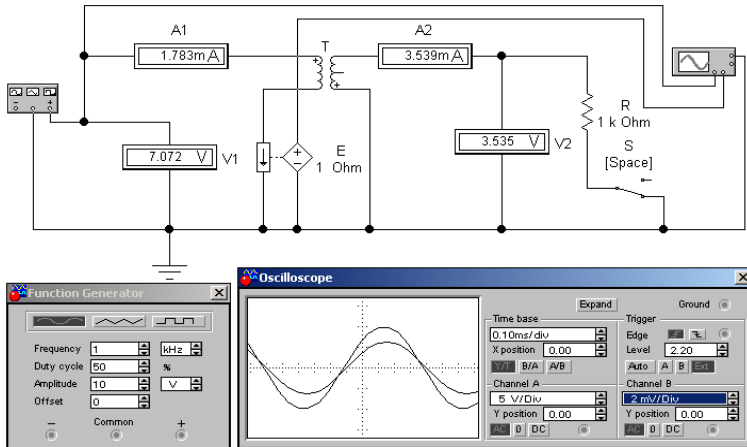


Рис. 3.37

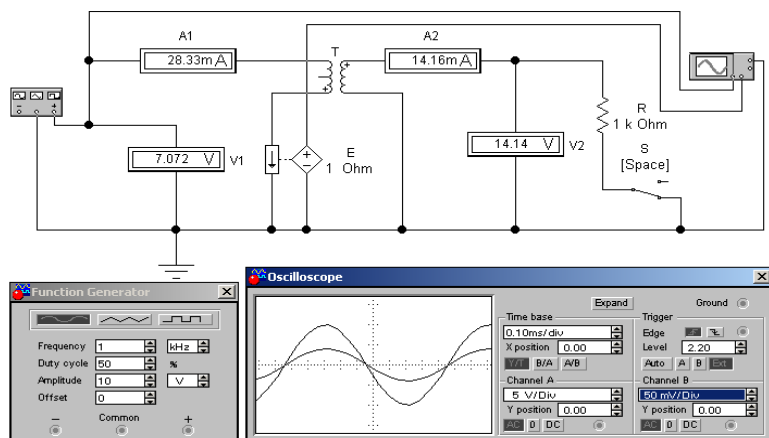


Рис. 3.38

Для визначення параметрів вторинної обмотки потрібно поміняти місцями обмотки таким чином, щоб вторинна обмотка стала первинною, як на рис. 5.38, відімкнути навантаження перемикачем S і виконати виміри саме такі, як у схемі на рис. 5.37. Порівняти результати вимірювань взаємної індуктивності в обох схемах.

3.5. Підсумки і самоконтроль

Метою цього розділу є вивчення властивостей лінійних кіл у режимі гармонічних коливань. Основним засобом розрахунку таких режимів є метод комплексних амплітуд. Вільне користування цим методом є основою грамотності інженера. Для цього потрібно засвоїти такі поняття, як векторне зображення і комплексна амплітуда гармонічного коливання; комплексні опір, провідність, потужність, а також уміти складати та розв'язувати рівняння у комплексній формі, переходити від миттєвих значень коливання до комплексних амплітуд і, навпаки, досліджувати амплітудно-фазові співвідношення за допомогою векторних діаграм.

У цьому розділі вводяться такі нові поняття, як середнє та діюче значення коливання; активні, реактивні, повні та комплексні опори, провідності, потужності; добротності котушки і конденсатора, кута втрат; ідеального та реального трансформатора. Режим гармонічних коливань докладно розглянуто також у виданнях [2, гл. 5, 6], [3, гл. 2, 3], [6, гл. 7], [8, гл. 4, 5], [9, гл. 2], [11, гл. 5], [12, гл. 5].

Проконтролювати засвоєння матеріалу цього розділу можна за допомогою низки таких завдань і запитань.

- Що таке режим гармонічних коливань і коли він виникає в електричному колі?
- Якими параметрами визначається гармонічне коливання?
- Як визначити амплітуду, частоту, початкову фазу за осцилограмою гармонічного коливання?
- Що таке стала складова і діюче значення коливання? Чому вони дорівнюють у гармонічного коливання?
- Що таке векторне зображення і комплексна амплітуда гармонічного коливання?
- Які операції над зображувальними векторами і комплексними амплітудами відповідають додаванню, диференціюванню й інтегруванню гармонічних коливань?
- Що таке комплексні, повні, активні, реактивні опори і провідності? Який фізичний зміст модуля та аргумента комплексного опору?
- Що таке комплексна, активна і реактивна потужності? Який фізичний зміст активної та реактивної потужностей?
- Які еквівалентні схеми має двополюсник у режимі гармонічних коливань? Як перерахувати параметри однієї з цих схем у параметри іншої?

- Які амплітудно-фазові співвідношення між напругою і струмом в елементах опору, ємності, індуктивності?
- Напишіть вирази для комплексних, повних, активних, реактивних опорів, провідностей, потужностей елементів R , L , C .
- Як будуються векторні діаграми схеми?
- Запишіть закони Кірхгофа і Ома в комплексній формі.
- У чому полягає і які переваги має метод комплексних амплітуд?
- Що таке добротність і кут втрат котушки і конденсатора? Який фізичний смисл добротності?
- Що таке варіометр, ідеальний і реальний трансформатори? Які їх властивості та технічне призначення?
- Які виводи котушки називають однойменними?
- Зобразіть еквівалентні схеми заміщення трансформатора.
- Зобразіть схему трансформатора, приведену до первинної обмотки. Як на ній моделюється неідеальність трансформатора? Які вимоги до конструкції трансформатора впливають із цієї моделі?
- Сформулюйте умови узгодження навантаження із джерелом у режимі гармонічних коливань.

РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ КОЛА В РЕЖИМІ ПЕРІОДИЧНИХ КОЛИВАНЬ

4.1. Математичні моделі періодичних коливань

Періодичним називається коливання, яке повторюється з інтервалом часу T , що називають *періодом*. Розрізняють часові, частотні, операторні моделі коливань. *Часовою моделлю* називають функцію, що описує залежність миттєвої величини коливання від часу. Коливання складної форми зазвичай намагаються розкласти на прості складові. Як такі елементарні складові часто застосовують гармонічні коливання. Представлення складного коливання сумою гармонічних коливань називають *спектральним аналізом*. Спектральний аналіз періодичних коливань здійснюється за допомогою *рядів Фур'є*. Відомо, що періодична функція $f(t)$ з періодом T , яка відповідає певним вимогам, котрі завжди виконуються для функцій, моделюючих сигнали, може бути подана рядом

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \quad (4.1)$$

де $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$, $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_1 t dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_1 t dt$. Оскільки $a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = c_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n)$, де $a_n = c_n \cos \varphi_n$, $b_n = c_n \sin \varphi_n$, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = \arctg(b_n/a_n)$, вираз (6.1) можна подати як

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n). \quad (4.2)$$

Величина $c_0/2 = a_0/2$ є середнім значенням коливання за період, або його *сталого складовою*. Решта членів ряду (4.2) називаються *гармоніками*. Множина амплітуд гармонік c_n називається *спектром амплітуд*, а множина початкових фаз — *спектром фаз* коливання. Згідно з (4.2) спектри амплітуд і фаз при заданій частоті першої гармоніки ω_1 цілком визначають коливання, а отже, можуть розглядатись як математична *частотна модель коливання*, рівноцінна часовій моделі $f(t)$.

Приклад 4.1. Виконати гармонічний аналіз періодичної послідовності імпульсів струму (див. рис. 4.1).

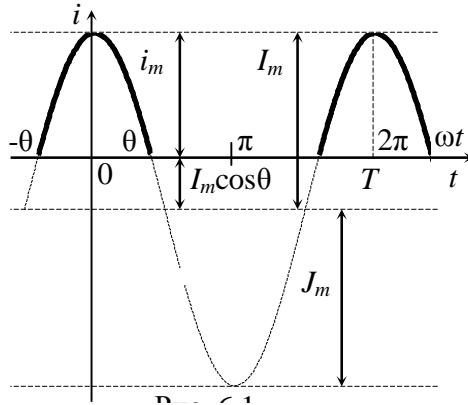


Рис. 4.1

Розв'язання. В інтервалі від $-\theta$ до $+\theta$ струм є парною функцією часу; отже, $b_n = 0$. Тоді амплітуда n -ї гармоніки струму

$$I_n = a_n = \frac{2}{T} \int_0^T I_m (\cos \omega_1 t - \cos \theta) \cos n \omega_1 t dt.$$

Покладаючи $\omega_1 t = x$, перетворимо інтеграл до такого вигляду:

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} I_m (\cos x - \cos \theta) \cos nx dx.$$

Тут враховано, що $T = 2\pi/\omega_1$, а також що підінтегральний вираз дорівнює нулю поза інтервалом $(-\theta, \theta)$. Взявши інтеграл, одержимо

$$I_n = \frac{1}{\pi} I_m \left[\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{n} \right] = I_m F_n(\theta).$$

Оскільки амплітуда імпульсу $i_m = I_m(1 - \cos \theta)$, амплітуду n -ї гармоніки можна виразити через i_m та θ таким чином: $I_n = i_m \frac{F_n(\theta)}{1 - \cos \theta} = i_m f_n(\theta)$, де функції $f_n(\theta)$ кута відсікання θ називаються коефіцієнтами Берга. Їх графі-

ки показано на рис. 4.2. Щоб визначити амплітуду n -ї гармоніки, потрібно для заданого кута відсікання знайти n -й коефіцієнт Берга та помножити його на амплітуду імпульсу. Оскільки $b_b = 0$, $\varphi_n = 0$. Одержавши амплітуди та фази гармонік, можемо струм подати у вигляді ряду

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega_1 t + I_2 \cos 2\omega_1 t + \dots$$

КМ 4.1. Виконати завдання 1 з підрозділу 4.5.1.

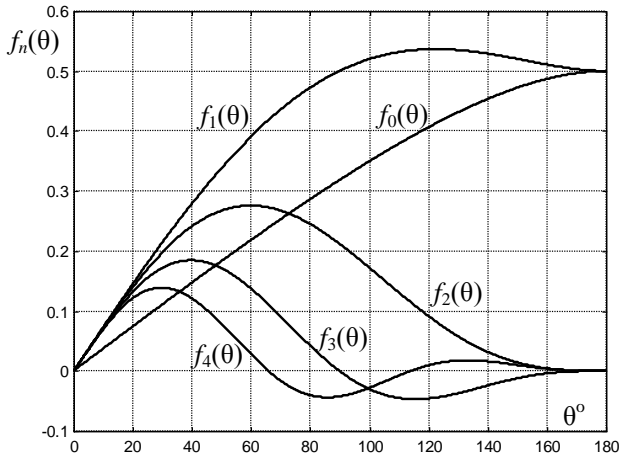


Рис. 4.2

Вирази (4.1), (4.2) є тригонометричною формою ряду Фур'є. Подавши n -ну гармоніку в (4.2) як

$$C_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) = C_n \frac{e^{j(n\omega_1 t - \varphi_n)} + e^{-j(n\omega_1 t - \varphi_n)}}{2}, \quad (4.3)$$

можна одержати комплексну форму ряду Фур'є

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (4.4)$$

де комплексна амплітуда n -ї гармоніки $\underline{C}_n = C_n e^{-j\varphi_n} = C_n \cos \varphi_n - jC_n \sin \varphi_n = a_n - jb_n$. Підставивши вирази a_n та b_n , взяті з (6.1), одержимо

$$\underline{C}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (4.5)$$

Виразу (4.3) відповідає векторна діаграма (див. рис. 4.3), яка зображає гармонічне коливання як суму двох векторів, що обертаються на комплексній площині у протилежних напрямках. Це приводить до поняття *від'ємної частоти* — кутової швидкості вектора, що обертається у протилежному напрямку. В результаті можна тлумачити гармонічне коливання як півсуму *комплексних коливань*: одного з додатною частотою $\underline{C}_n e^{jn\omega_1 t}$ і другого — з від'ємною частотою $C_n e^{-jn\omega_1 t}$, де комплексно спряжена амплітуда $C_n = C_n e^{j\varphi_n}$. Саме в такому сенсі можна тлумачити формулу (4.4), сума в якій береться як по від'ємним, так і по додатним частотам (номерам гармонік), включаючи $n = 0$.

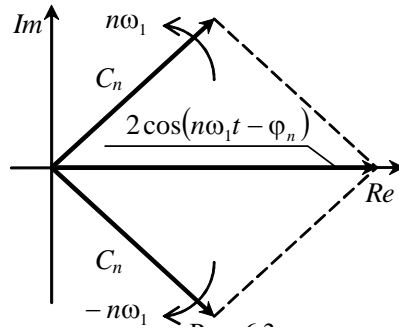


Рис. 4.3

Приклад 4.2. Розрахувати спектри та побудувати спектральні діаграми амплітуд і фаз періодичної послідовності прямокутних імпульсів (рис. 6.4).

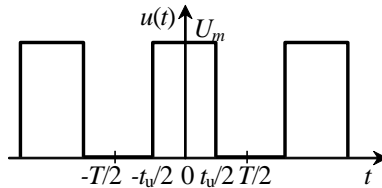


Рис. 4.4

Розв'язання. Знаходимо комплексну амплітуду n -ї гармоніки напруги за формулою (4.5):

$$\underline{U}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} U_m e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{2U_m}{T jn\omega_1} (e^{jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}}) = \frac{2U_m \tau}{T} \left| \frac{\sin(n\omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}} \right|, \quad (4.6)$$

$$\phi_n = \begin{cases} 2k\pi & \text{якщо } \sin(n\omega_1 \frac{\tau}{2}) \geq 0; \\ (2k+1)\pi & \text{якщо } \sin(n\omega_1 \frac{\tau}{2}) < 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Підставляючи в (4.6) номери гармонік $n = 1, 2, \dots$, одержимо амплітуди та фази гармонік. Спектри зображують *спектральними діаграмами*, де по осі абсцис відкладають частоти, а по осі ординат – амплітуди або фази гармонік. На рис. 4.5 зображено спектри, розраховані за формулою (4.6).

Поцікавись, як змінюється спектр, якщо змінювати параметри імпульсу. Очевидно, амплітуди гармонік пропорційні амплітуді імпульсу. У разі збільшення періоду T амплітуди гармонік зменшуються. При цьому зменшується і відстань між ними на осі частоти, що дорівнює $\omega_1 = 2\pi/T$. Спектр робиться «густішим» (рис. 4.5, в). У разі зменшення тривалості імпульсу τ спектр розширюється, амплітуди гармонік зменшуються, а відстань між ними не змінюється (рис. 4.5, г). Як показано далі, розширення спектра у разі зменшення тривалості притаманне всім сигналам.

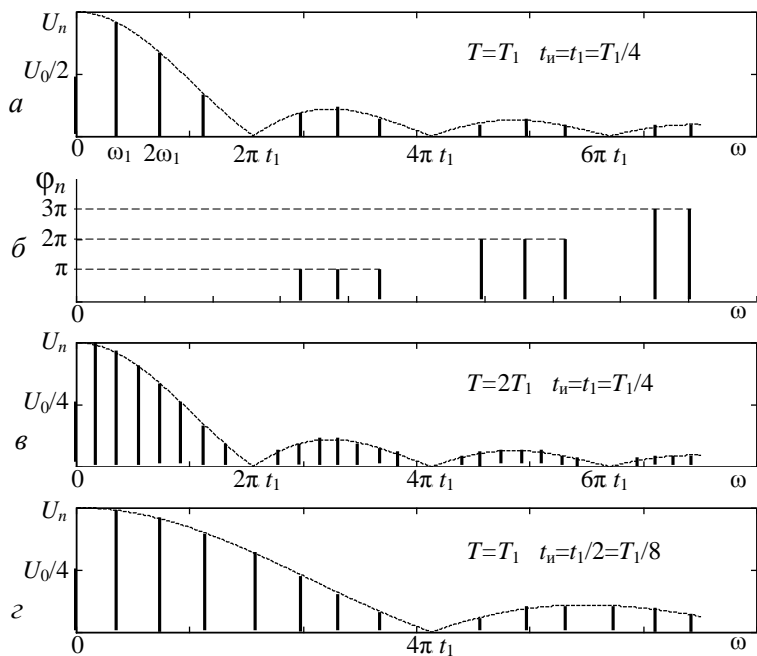


Рис. 4.5

КМ 4.2. Виконати завдання 2 з підрозділу 4.5.1.

4.2. Частотні характеристики. Електричні фільтри

Частотні характеристики дають уявлення про властивості та функціональні можливості лінійних кіл, їх легко одержують експериментально, тому вони знаходять широке застосування на практиці. Частотні характеристики (ЧХ) визначаються через поняття *комплексної схемної функції*, під якою розуміють відношення комплексних амплітуд змінних реакції \underline{X} та дії \underline{Q} , тобто:

$$\underline{F} = \underline{X}/\underline{Q} = X_m e^{j\varphi_x} / Q_m e^{j\varphi_Q} = F(\omega) e^{j\varphi_F(\omega)},$$

де $F(\omega) = X_m/Q_m$ – модуль схемної функції, що дорівнює відношенню амплітуд гармонічних змінних реакції X_m та дії Q_m , а аргумент $\varphi_F(\omega) = \varphi_x - \varphi_Q$ дорівнює різниці фаз цих змінних. Залежність модуля схемної функції від частоти $F(\omega)$ називають *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ), а залежність від частоти аргумента $\varphi_F(\omega)$ – *фазочастотною характеристикою* (ФЧХ). У попередньому розділі було показано, що комплексні амплітуди пов'язані такими самими рівняннями, як і змінні в неінерційних колах. Тому одержані в розділі 3 результати щодо схемних функцій можна застосовувати й до комплексних схемних функцій, причому матриці опорів складаються з комплексних опорів, а матриці провідностей — із комплексних провідностей.

Приклад 4.3. Розрахувати та побудувати АЧХ і ФЧХ коефіцієнта передачі напруги RC - та RL -ланцюжків (рис. 4.6).

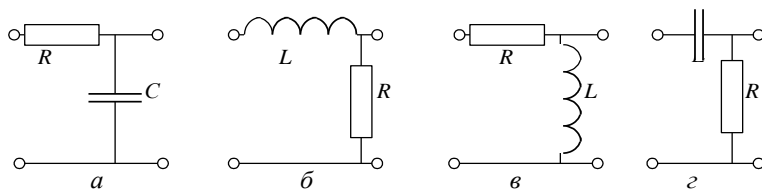


Рис. 4.6

Розв'язання. Знаходимо комплексні коефіцієнти передачі напруги перших двох ланцюжків, розглядаючи їх як подільники напруги:

$$\underline{K}_U(\omega) = (1/j\omega C)/(R + 1/j\omega C) = 1/(1 + j\omega\tau_C),$$

$$\underline{K}_U(\omega) = R/(R + j\omega L) = 1/(1 + j\omega\tau_L),$$

де $\tau_c = RC$, $\tau_L = L/R$ – сталі часу. Як бачимо, обидва ланцюжки мають однакові коефіцієнти передачі, а отже, й частотні характеристики. Знаходимо вирази для АЧХ і ФЧХ як модуль і аргумент $\underline{K}_U(\omega)$:

$$K_U = 1/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}, \quad \varphi_K = -\arctg\omega\tau. \quad (4.7)$$

На рис. 4.7 показано ЧХ, розраховані за (4.7). Вид одержаних ЧХ можна пояснити так. Коли $\omega \rightarrow 0$ опір ємності $X_C = 1/\omega C \rightarrow \infty$, тобто стає набагато більшим від R . Тому $U_2 \approx U_1$ і $K_U \approx 1$, а $\varphi_K \approx 0$. Коли ж $\omega \rightarrow \infty$, маємо $X_C \rightarrow 0$ й $K_U \rightarrow 0$. При цьому вхідний опір стає практично суто активним, так що струм буде синфазним із вхідною напругою U_1 , а вихідна напруга на ємності відставатиме від струму за фазою на $\pi/2$. Тому зсув фаз φ_K на високих частотах наближається до $\pi/2$. Аналогічно пояснюються й ЧХ RL -ланцюжка.

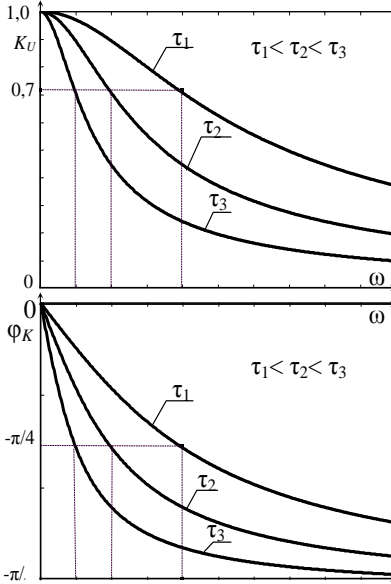


Рис. 4.7

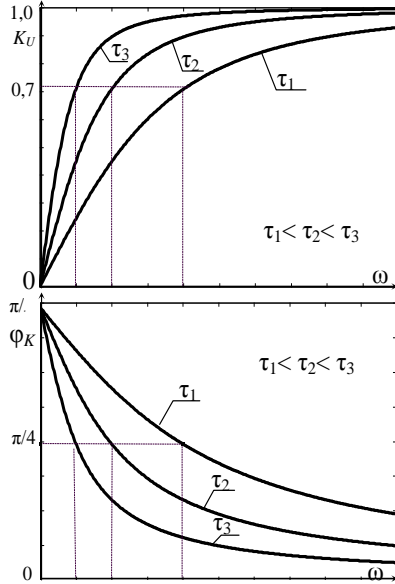


Рис. 4.8

Проаналізуємо решту ланцюжків. Знаходимо комплексні коефіцієнти передачі напруги:

$$\underline{K}_U(\omega) = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega\tau_c}{1 + j\omega\tau_c}, \quad \underline{K}_U(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau_L}{1 + j\omega\tau_L}.$$

Ці ланцюжки також мають однакові коефіцієнти передачі. Знаходимо їх модуль і аргумент:

$$K_U(\omega) = \omega\tau / \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \varphi_K(\omega) = \pi/2 - \arctg\omega\tau.$$

Частотні характеристики, побудовані за цими виразами при різних значеннях τ , показані на рис. 4.8. Вигляд цих характеристик можна пояснити так, як і попередніх.

КМ 4.3. Виконати завдання 1 з підрозділу 4.5.2.

Електричним фільтром називають ЕМК, сконструйоване таким чином, щоб пропускати коливання одних частот і затримувати (угамовувати, пригнічувати) їх на інших частотах. Перші частоти утворюють *смугу пропускання* фільтра, а другі – *смугу затримання*. Смуга пропускання відокремлюється від смуги затримання *граничними частотами*. Оскільки в реальних фільтрах ЧХ змінюється із частотою плавно, домовилися вважати граничними частоти, на яких величина АЧХ зменшується до $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ свого максимального значення. Отже, граничні частоти знаходять із рівняння

$$K(\omega_{гр}) / K_{\max} = 1/\sqrt{2}. \quad (4.8)$$

Залежно від розташування смуг пропускання та затримання на осі частот розрізняють *фільтри нижніх частот* (ФНЧ), *верхніх частот* (ФВЧ), *смугові* (СФ), *режекторні* (РФ) фільтри. *Ідеальний фільтр* повинен мати сталий коефіцієнт передачі у смузі пропускання та рівний нулю у смузі затримання. На рис. 4.9 показано АЧХ ідеальних фільтрів.

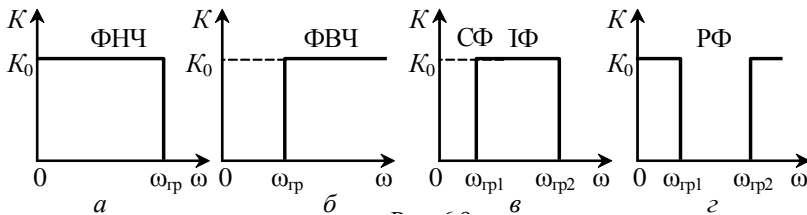


Рис. 4.9

Приклад 4.4. Визначити граничні частоти та смуги пропускання фільтрів, утворених ланцюжками (див. рис. 4.6).

Розв'язання. Як видно з рис. 4.7, перші два ланцюжки можна використувати як ФНЧ зі смугою пропускання від нуля до $\omega_{\text{гр}} = 1/\tau$, яку знаходимо з рівняння $1/\sqrt{1+\omega_{\text{гр}}^2\tau^2} = 1/\sqrt{2}$, одержаного підстановкою (4.7) та $K_{\text{max}} = 1$ в (4.8). Другі два ланцюжки є фільтрами верхніх частот (див. рис. 4.8) і мають смугу пропускання від $\omega_{\text{гр}} = 1/\tau$ до $\omega \rightarrow \infty$. Граничну частоту знаходять із рівняння $\omega_{\text{гр}}\tau/\sqrt{1+\omega_{\text{гр}}^2\tau^2} = 1/\sqrt{2}$.

Частотні характеристики, особливо широкосмугових кіл, зручно будувати в логарифмічних координатах, коли по осі абсцис замість ω відкладають $\lg \omega$, а по осі ординат – значення коефіцієнта передачі у логарифмічних одиницях – *децибелах* (дБ), які визначаються за формулою

$$K_{\text{дБ}} = 20 \lg K. \quad (4.9)$$

Такі АЧХ називаються *логарифмічними* (ЛЧХ). Крім децибелів, використовують також логарифмічні одиниці – *непери* (Нп), що розраховують за формулою

$$K_{\text{Нп}} = \ln K. \quad (4.10)$$

Із (4.9) і (4.10) випливає, що $1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ}$.

Приклад 4.5. Розрахувати і побудувати ЧХ і ЛЧХ коефіцієнта передачі напруги схеми (рис.4.10). Дано: $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = L_2 = 10 \text{ мГн}$.

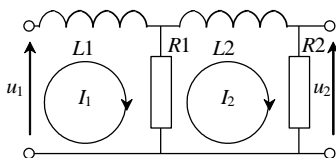


Рис. 4.10

Розв'язання. Дану схему опишемо матрицею опорів

$$[Z] = \begin{bmatrix} (R_1 + j\omega L_1) & -R_1 \\ -R_1 & (R_1 + R_2 + j\omega L_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.1 + 10j\omega) & -0.1 \\ -0.1 & (0.2 + 10j\omega) \end{bmatrix} \text{ кОм.}$$

Коефіцієнт передачі напруги

$$K_U(\omega) = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \cdot R_2 = \frac{0.01}{0.01 - 100\omega^2 + 3j\omega}. \quad (4.11)$$

Виділимо модуль та аргумент

$$|K_U(\omega)| = \frac{0.01}{\sqrt{(0.01 - 100\omega^2)^2 + 9\omega^2}}; \quad (4.12)$$

$$\varphi_k(\omega) = -\arctg\left(\frac{3\omega}{0.01 - 100\omega^2}\right). \quad (4.13)$$

Графіки розрахованих за формулами (4.12) і (4.13) частотних характеристик зображено на рис. 4.11, а на рис. 4.12 – ЛЧХ.

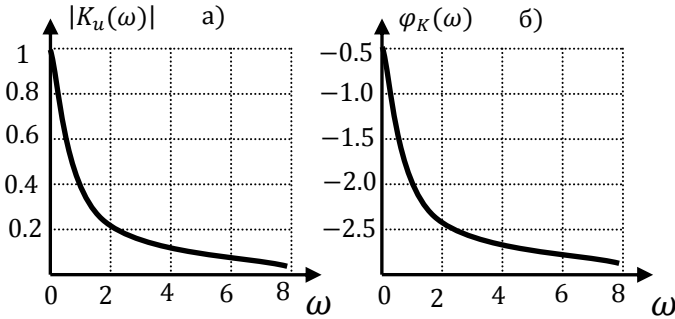


Рис. 4.11

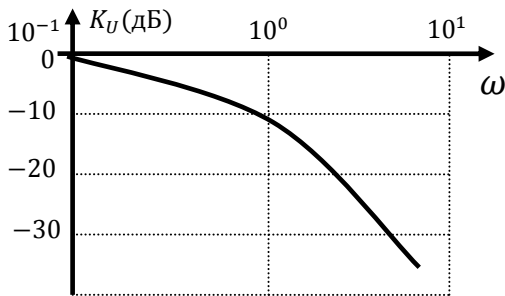


Рис. 4.12

КМ 4.4. Змоделювати на комп'ютері схему, зображену на рис. 4.10, встановивши величини параметрів, заданих у прикладі 4.5. Зняти амплітудно-частотну і фазочастотну характеристики коефіцієнта передачі напруги в цій схемі за методикою, що описана в підрозділі 4.5.2. Порівняти експери-

ментально отримані частотні характеристики з розрахованими у прикладі 4.5.

Часто на практиці потрібно вміти будувати ЧХ якісно, тобто не знаходячи математичних виразів. Розглянемо методику побудови ЧХ схем з одним-двома реактивними елементами. Уразі якісної побудови ЧХ враховують таке: при $\omega \rightarrow 0$ $X_L = \omega L \rightarrow 0$, $X_C = 1/\omega C \rightarrow \infty$; при $\omega \rightarrow \infty$ $X_L \rightarrow \infty$, $X_C \rightarrow 0$; в послідовному з'єднанні можна знехтувати елементом з меншим опором, замкнувши його; в паралельному з'єднанні можна знехтувати елементом з меншою провідністю, відімкнувши його. Виходячи із цих міркувань, можна значно спростити схему на низьких і на високих частотах. При побудові ЧХ на середніх частотах враховують, що ЧХ схем з одним-двома реактивними елементами може мати не більше одного екстремуму.

Приклад 4.6. Проаналізувати вплив конструктивної паразитної ємності C_0 на АЧХ подільника напруги (див. рис. 4.14, а).

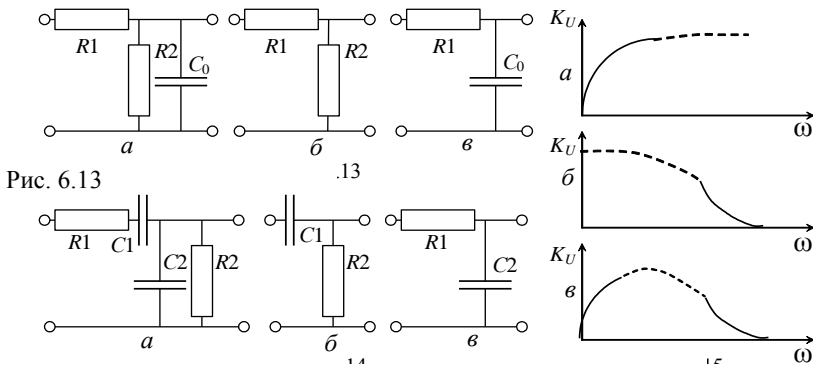


Рис. 4.14

Рис. 4.15

Розв'язання. При $\omega \rightarrow 0$ провідність ємності $\omega C_0 \ll G_2$, і нею можна знехтувати. Тому еквівалентна схема для низьких частот має вигляд (див. рис. 4.14, б). Для цієї схеми $K_U = R_2 / (R_1 + R_2)$. На високих частотах $\omega \rightarrow \infty$ маємо еквівалентну схему (див. рис. 4.14, в), оскільки $\omega C_0 \gg G_2$. У цій схемі зі збільшення частоти K_U зменшується до нуля (див. рис. 4.7). Таким чином, наявність паразитної ємності призводить до завалу АЧХ на високих частотах.

КМ 4.5. Виконати завдання 2 з підрозділу 4.5.2.

Приклад 6.7. Побудувати якісно АЧХ схеми Віна (рис. 4.14, а).

Розв'язання. Будуємо еквівалентні схеми для низьких (рис. 4.14, б) і високих (рис. 4.14, в) частот, виходячи з того, що при $\omega \rightarrow 0$ $1/\omega C_1 \gg R_1$ і $\omega C_2 \ll G_2$, а при $\omega \rightarrow \infty$ $\omega C_2 \gg G_2$ і $1/\omega C_1 \ll R_1$. На рис. 4.15, а, б показано АЧХ RC-ланцюжків (рис. 4.14, б, в). Знаючи хід АЧХ на низьких і високих частотах, суцільні лінії на рис. 4.15, в добудовуємо АЧХ на середніх частотах — пунктирна лінія.

КМ 4.6. Виконати завдання 3 з підрозділу 4.5.2.

4.3. Частотні характеристики резонансних кіл

4.3.1. Резонансні контури

Резонансними називаються кола, що мають реактивності обох видів: ємності й індуктивності і в яких виникає явище резонансу. Найпростішим резонансним колом є *резонансний контур*, що складається з котушки і конденсатора. Залежно від способу ввімкнення джерела розрізняють *послідовну* і *паралельну* схеми (рис. 4.16).

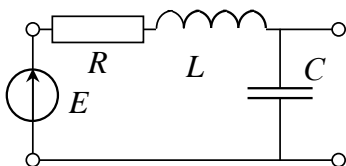


Рис. 6.16

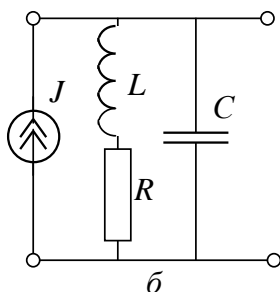


Рис. 4.16

Параметри L, C, R називаються *первинними*. Під час вивчення ЧХ контура зручно користуватися *вторинними параметрами*:
резонансною частотою

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

на котрій реактивний опір контура $\omega_p L - 1/\omega_p C = 0$;
характеристичним опором

$$\rho = \omega_p L = 1/\omega_p C = \sqrt{L/C},$$

що дорівнює опорів індуктивності або ємності на резонансній частоті;
добротністю

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

У послідовному контурі вхідна комплексна провідність

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{1}{R + jX}, \quad (4.14)$$

коефіцієнти передачі напруги від джерела до ємності та індуктивності

$$\underline{K}_{UC} = \frac{-jX_C}{R + jX}, \quad \underline{K}_{UL} = \frac{jX_L}{R + jX}, \quad (4.15)$$

де $X = X_L - X_C = \omega L - 1/\omega C$.

У паралельному контурі вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{R + jX}, \quad (4.16)$$

коефіцієнти передачі струму від джерела в ємнісну та індуктивну вітки

$$\underline{K}_{iC} = \frac{R + jX_L}{R + jX}, \quad \underline{K}_{iL} = \frac{-jX_C}{R + jX}. \quad (4.17)$$

На практиці звичайно застосовують контури високої добротності, в яких $R \ll \omega L$. Такі контури, як показано далі, мають вузьку смугу пропускання поблизу ω_p . Тому беручи $X_L \approx \omega_p L = \rho$, $X_C \approx 1/\omega_p C = \rho$, вирази (4.14...4.17) доводимо до вигляду

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{\text{вх}} &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\chi}, \quad \underline{K}_{UC} = -jQ \frac{1}{1 + j\chi}, \quad \underline{K}_{UL} = jQ \frac{1}{1 + j\chi}, \\ \underline{Z}_{\text{вх}} &= R_{\text{еп}} \frac{1}{1 + j\chi}, \quad \underline{K}_{iC} = jQ \frac{1}{1 + j\chi}, \quad \underline{K}_{iL} = -jQ \frac{1}{1 + j\chi}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

де $R_{\text{еп}} = \rho^2/R$ — *еквівалентний резонансний опір* паралельного контура,
 $\chi = X/R$ — *узагальнене розстроєння*. Модулі схемних функцій (4.18)

$$Y_{\text{вх}} = G n_1(\chi), \quad Z_{\text{вх}} = R_{\text{ер}} n_1(\chi), \quad K_{\text{UC}} = K_{\text{UL}} = K_{\text{iC}} = K_{\text{iL}} = Q n_1(\chi)$$

мають множник

$$n_1(\chi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2}}, \quad (4.19)$$

який називається *рівнянням резонансної кривої* (див. рис. 6.17). Воно визначає залежність схемних функцій від частоти через узагальнене розстроєння:

$$\chi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_p L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{1}{\omega_p \omega LC} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right). \quad (4.20)$$

Цей вираз можна спростити, тобто

$$\chi = Q \frac{(\omega - \omega_p)(\omega + \omega_p)}{\omega_p \omega} = Q \frac{\Delta\omega}{\omega_p} \cdot \frac{\omega + \omega_p}{\omega}.$$

Якщо $\omega \approx \omega_p$, $\chi \approx Q 2\Delta\omega/\omega_p = 2Q\eta$, де $\Delta\omega = \omega - \omega_p$ — абсолютне, а $\eta = \Delta\omega/\omega_p$ — відносне розстроєння контура. На резонансній частоті $\Delta\omega, \eta, \chi = 0$, $n_1(0) = 1$, $Y_{\text{вх},p} = G$, $Z_{\text{вх},p} = R_{\text{ер}}$, $K_{\text{U},p} = Q$, $K_{\text{i},p} = Q$. Частотні характеристики схемних функцій у зведених координатах

$$\overline{Y_{\text{вх}}} = \frac{Y_{\text{вх}}}{Y_{\text{вх},p}} = n_1(\chi), \quad \overline{Z_{\text{вх}}} = \frac{Z_{\text{вх}}}{Z_{\text{вх},p}} = n_1(\chi), \quad \overline{K_{\text{U}}} = \overline{K_{\text{i}}} = \frac{K}{K_p} = n_1(\chi)$$

мають вигляд резонансної кривої (рис. 4.17). Можна будувати АЧХ контура в будь-яких координатах, помножуючи $n_1(\chi)$ на резонансне значення схемної функції та перераховуючи χ за формулами

$$\eta = \frac{1}{2Q} \chi, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_p}{2Q} \chi, \quad \omega = \omega_p \left(1 + \frac{1}{2Q} \chi \right). \quad (4.21)$$

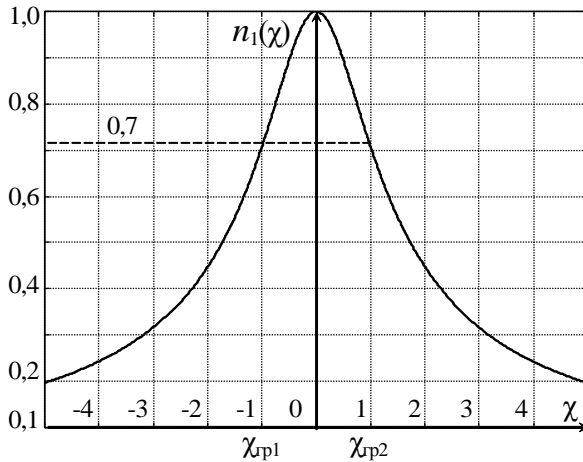


Рис. 4.17

Резонансний характер АЧХ показує, що поодинокий контур можна застосувати як смуговий фільтр. Визначимо його *смугу пропускання* з умови $n_1(\chi_{гр}) = 1/\sqrt{1 + \chi_{гр}^2} = 1/\sqrt{2}$, звідки знаходимо $\chi_{гр} = \pm 1$. Підставивши ці значення у (4.21), одержимо

$$\Pi_{0,7} = \omega_{гр2} - \omega_{гр1} = \omega_p / Q. \quad (4.22)$$

Із (4.22) випливає

$$Q = \frac{\omega_p}{\omega_{гр2} - \omega_{гр1}} = \frac{f_p}{f_{гр2} - f_{гр1}},$$

що дає змогу визначити добротність контура по АЧХ. Добротність можна також визначити, виходячи з того, що при резонансі в послідовному контурі $K_{Uр} = Q$, а в паралельному $K_{Iр} = Q$, тобто в послідовному контурі напруга на реактивних елементах в Q разів перевищує напругу джерела, а в паралельному — струм в контурі в Q разів більший за струм джерела. Тому розрізняють *резонанс напруг* у послідовному та *резонанс струмів* у паралельному контурах. Це треба мати на увазі при конструюванні компонентів контурів, добротність яких сягає десятків і навіть сотень одиниць.

КМ 4.7. Виконати завдання 1, 2 з підрозділу 4.5.3.

У реальних умовах потрібно врахувати опори джерела та навантажень, що вмикаються до контурів (рис. 4.18, *а* і рис. 4.19, *а*). Навантаження $R_{\text{н}}$ збільшує втрати, що еквівалентне збільшенню опору втрат у контурі на величину *внесеного опору* $R'_{\text{н}}$ (рис. 4.18, *б*). Це приводить до еквівалентної схеми (рис. 4.18, *в*), де

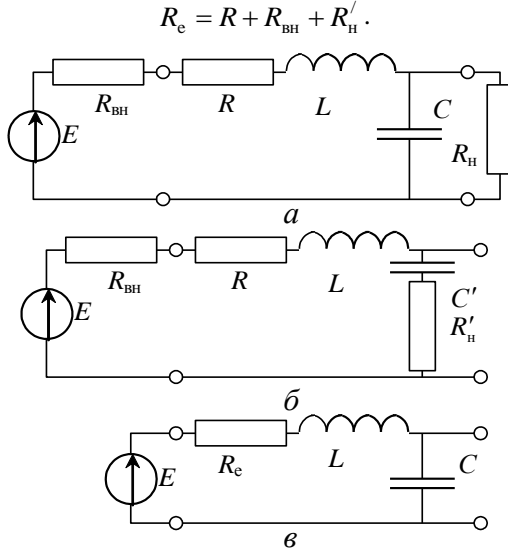


Рис. 4.18

Отже, вплив опорів джерела та навантаження еквівалентне збільшенню опору втрат у контурі. Внесений опір вираховуємо, перетворивши паралельний ланцюжок $CR_{\text{н}}$ в еквівалентний послідовний (рис. 4.18, *б*), параметри якого знаходимо за формулами (4.13):

$$R'_{\text{н}} = \frac{G_{\text{н}}}{G_{\text{н}}^2 + (\omega C)^2}, \quad \frac{1}{\omega C'} = \frac{\omega C}{G_{\text{н}}^2 + (\omega C)^2}.$$

Звичайно $R_{\text{н}} \gg 1/\omega C \approx \rho$ або ж $G_{\text{н}} \ll \omega C$. Тоді

$$C' \approx C, \quad R'_{\text{н}} = \rho^2 / R_{\text{н}}. \tag{4.23}$$

Перетворивши джерело напруги на джерело струму (рис. 4.19), можна знайти для паралельного контура $R_{\text{е}} = R + R'_{\text{н}} + R'_{\text{вн}}$, де $R'_{\text{вн}} = \rho^2 / R_{\text{вн}}$ — внесе-

ний опір з боку джерела. Визначимо *еквівалентну добротність* контура як $Q_e = \rho / R_p$ і знайдемо для послідовного контура

$$Q_e = \frac{\rho}{R + R_{\text{вн}} + R'_H} = \frac{Q}{1 + R_{\text{вн}}/R + \rho^2/RR_H} \quad (4.24)$$

та паралельного контура

$$Q_e = \frac{\rho}{R + R'_{\text{вн}} + R'_H} = \frac{Q}{1 + \rho^2/RR_{\text{вн}} + \rho^2/RR_H}. \quad (4.25)$$

Вирази (4.24)–(4.25) показують, що еквівалентна добротність Q_e завжди менша від власної, або *конструктивної, добротності* Q . Це згідно з (4.22), приводить до розширення смуги пропускання контура. Для підвищення еквівалентної добротності треба збільшувати опір навантаження, і джерела з малим внутрішнім опором слід вмикати в контур послідовно, а з великим опором — паралельно (див. (4.24)–(4.25)).

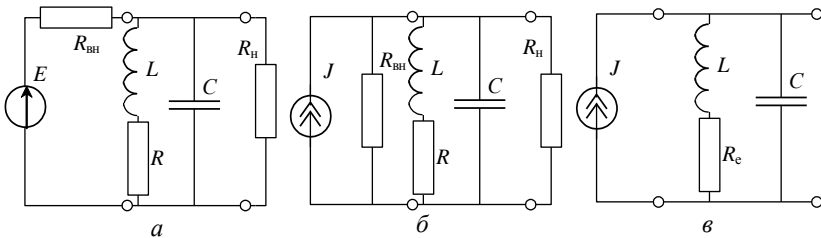


Рис. 4.19

КМ 4.8. Виконати завдання 3 з підрозділу 4.5.3.

Для зменшення впливу джерел і навантажень застосовують також *часткове ввімкнення контура* (рис. 4.20). Схеми (рис. 4.20, а, б) називають відповідно *контурами другого та третього виду*.

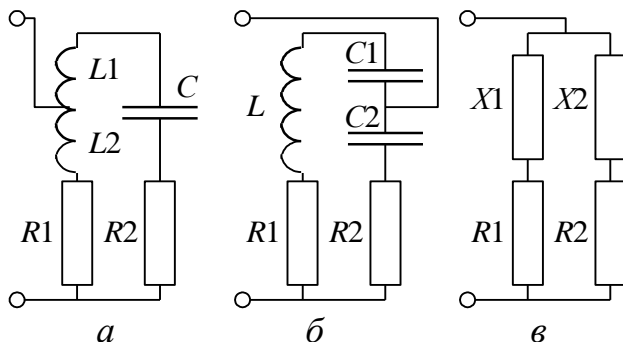


Рис. 4.20

На рис. 4.20, в показано узагальнену схему паралельного контура. Її вхідний опір за умови $R_1 \ll X_1$, $R_2 \ll X_2$,

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R + jX} \approx \frac{-X_1X_2}{R + jX} = \frac{-X_1X_2R}{Z^2} + j\frac{X_1X_2X}{Z^2} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}, \quad (4.26),$$

де $X = X_1 + X_2$, $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Знайдемо резонансні частоти з умови

$$X_{\text{вх}} = X_1X_2X / (R^2 + X^2) = 0,$$

що рівнозначно $X_1 = 0$, або $X_2 = 0$, або $X = 0$. Для контура другого виду $X_1 = \omega L_1 = 0$, $X_2 = \omega L_2 - 1/\omega C = 0$, $\omega L_1 + \omega L_2 - 1/\omega C = 0$, звідки знаходимо: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2C}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, де $L = L_1 + L_2$ — повна індуктивність контура. Частота ω_2 — це частота резонансу напруг у правій вітці, що являє собою послідовне з'єднання елементів L_2 та C , а на частоті ω_0 маємо резонанс струмів у всьому контурі. На частоті ω_2 опір контура є малим і практично дорівнює R_2 . Опір на частоті ω_0 знаходимо з (4.26) при $X = X_1 + X_2 = 0$, а саме:

$$R_{\text{сп}2} = \frac{X_1^2}{R} = \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R} = \left(\frac{L_1}{L}\right)^2 \frac{\omega_0^2 L^2}{R} = p_2^2 R_{\text{сп}}, \quad (4.27)$$

де $p_2 = L_1/L$ — коефіцієнт ввімкнення контура другого виду. Аналогічно знаходимо для контура третього виду частоту резонансу напруг у лівій вітці:

$$\omega_1 = 1/\sqrt{LC_1}$$

та частоту резонансу струмів

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC},$$

де $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ – повна ємність контура, а також резонансний опір

$$R_{ep3} = p_3^2 R_{ep},$$

де $p_3 = C/C_2 = C_1/(C_1 + C_2)$ – коефіцієнт ввімкнення контура третього виду. Оскільки $p_2 < 1$ та $p_3 < 1$, R_{ep2} та $R_{ep3} < R_{ep}$. Перетворивши (4.25) до вигляду $Q_e = Q/(1 + R_{ep}/R_{вн} + R_{ep}/R_n)$, робимо висновок, що зменшення R_{ep} при частковому ввімкненні контура підвищує Q_e . Це пояснюється тим, що при частковому ввімкненні зменшується напруга в навантаженні, а отже, й втрати.

КМ 4.9. Виконати завдання 4, 5, 6, 7 з підрозділу 4.5.3.

Приклад 4.8. Послідовний контур складено з котушки з параметрами $L = 200$ мкГн, $Q_L = 100$ та конденсатора з параметрами $C = 100$ пФ, $Q_C = 1\,000$, де Q_L , Q_C — добротності котушки й конденсатора на резонансній частоті. Джерело має внутрішній опір $R_{вн} = 5$ Ом. Напруга з виходу контура подається на підсилювач, вхідний опір якого можна подати паралельним з'єднанням $R_{вх} = 10$ кОм та $C_{вх} = 20$ пФ. Визначити резонансну частоту та смугу пропускання.

Розв'язання. Замінивши котушку і конденсатор відповідно послідовною та паралельною схемами, а також підсилювач його вхідним опором, одержимо розрахункову схему (рис. 4.21), яку можна звести до схеми, зображеної на рис. 4.18, в, якщо втрати у всіх компонентах врахувати опором R_e , а ємність $C_{вх}$ включити до ємності контура: $C_e = C + C_{вх}$. Знаходимо резонансну частоту $f_p = 1/2\pi\sqrt{LC_e} = 650$ кГц, характеристичний опір $\rho = \sqrt{L/C_e} = 816$ Ом, опори втрат у котушці та конденсаторі: $R_L = \rho/Q_L = 8,16$ Ом, $R_C = 1/G_C = Q_C/\omega_p C = \rho Q_C = 816$ кОм; опір навантаження $R_n = R_C R_{вх} / (R_C + R_{вх}) = 9,88$ кОм, внесений опір з боку навантаження $R'_n = \rho^2 / R_n = 67,4$ Ом, еквівалентний опір втрат $R_e = R_L + R_C + R'_n = 80,6$ Ом, еквівалентну добротність $Q_e = \rho/R_e = 10,1$ та смугу пропускання $\Pi_{0,7} = f_p/Q_e = 64,4$ кГц. Як бачимо, найбільші втрати вносить вхідний опір підсилювача, що приводить до розширення смуги пропускання.

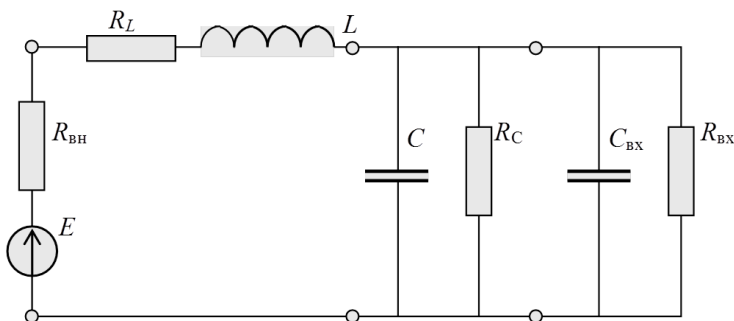


Рис. 4.21

Приклад 4.9. Застосувати у контурі, описаному у прикладі 4.8, часткове ввімкнення до контура входу підсилювача і визначити коефіцієнт ввімкнення, за якого смуга пропускання $\Pi_{0,7} = 15$ кГц.

Розв'язання. Для одержання заданої смуги добротність має бути $Q_e = f_p / \Pi_{0,7} = 43,3$, а еквівалентний опір втрат $R_e = \rho / Q_e = 18,8$ Ом. Знаходимо внесений опір $R'_n = R_e - R_{вн} - R_L = 5,7$ Ом. При частковому ввімкненні $R'_n = p^2 \rho / R_n$, звідки визначаємо потрібний коефіцієнт ввімкнення. Для виконання такого ввімкнення навантаження вихід контура треба виконати за схемою рис. 4.22.

Ємності знаходимо з таких співвідношень:
 $p = C_1 / (C_1 + C_2)$, $C = C_1 C_{2e} / (C_1 + C_{2e})$, $C_{2e} = C_2 + C_{вх}$,
 звідки $C_{2e} = C / p = 1034$ пФ, $C_2 = C_{2e} - C_{вх} =$
 $= 1014$ пФ, $C_1 = C_{2e} p / (1 - p) = 422,5$ пФ.

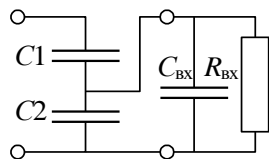


Рис. 4.22

Приклад 4.10. У послідовному контурі (рис. 4.23) визначити резонансну частоту, добротність контуру, смугу пропускання, споживану активну та реактивні потужності контуру. Числові значення елементів: $R = 50 \text{ Ом}$, $L = 400 \text{ мкГн}$, $C = 100 \text{ пФ}$ діюче значення напруги $E = 10 \text{ мВ}$.

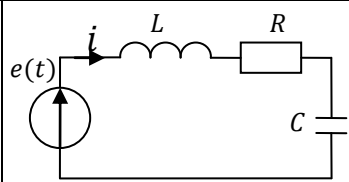


Рис. 4.23

Розв'язання

Резонансна частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-12}}} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{5 \cdot 10^6}{2\pi} \cong 7.9 \cdot 10^5 \text{ Гц} = 790 \text{ кГц}.$$

Характеристичний опір

$$\rho = \omega_0 L = 5 \cdot 10^6 \cdot 400 \cdot 10^{-6} = 2 \text{ кОм}.$$

Добротність контуру

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{2000}{50} = 40.$$

Смуга пропускання

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5 \cdot 10^6}{40} = 1.25 \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 125 \cdot \frac{\text{рад}}{\text{мс}};$$

$$\Pi_{\text{Гц}} = \frac{f_0}{2\pi} = \frac{7.9 \cdot 10^5}{2\pi} = 19.89 \text{ кГц}.$$

Струм у контурі на резонансній частоті

$$I = \frac{E}{R} = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ мА}.$$

Активна та реактивні потужності на резонансній частоті

$$P = I \cdot E = 0.2 \cdot 10 = 2 \text{ мВт};$$

$$Q_C = -I^2 X_C = -I^2 \rho = -0.2^2 \cdot 2 = -0.08 \text{ мВАр};$$

$$Q_L = I^2 X_L = I^2 \rho = 0.2^2 \cdot 2 = 0.08 \text{ мВАр}.$$

Відповідь: $\omega_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$, $Q = 40$, $\Pi = 125 \text{ рад/мс}$, $\Pi_{\text{Гц}} = 19.89 \text{ кГц}$,
 $P = 2 \text{ мВт}$, $Q_L = 0.08 \text{ мВАр}$, $Q_C = -0.08 \text{ мВАр}$.

Приклад 4.12. У послідовному контурі (рис. 4.24) знайти вхідний опір на резонансній частоті, добротність. Числові значення елементів такі: $r_K = 7.5$ Ом, $R_H = 100$ к Ом, $C = 1$ нФ, $L_1 = L_2 = 0.5$ мГн.

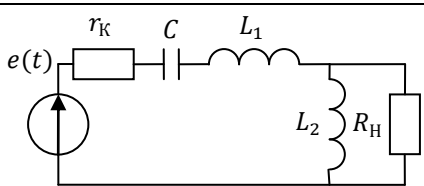


Рис. 4.24

Розв'язання

Еквівалентна індуктивність при послідовному з'єднанні

$$L_E = L_1 + L_2 = 0.25 + 0.25 = 0.5 \text{ мГн.}$$

Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L_E}{C}} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{C}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \text{ кОм.}$$

Коефіцієнт включення

$$p = \frac{X_{L2}}{X_{L1} + X_{L2}} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = \frac{0.5}{0.5 + 0.5} = 0.5.$$

Внесений опір з боку опору навантаження

$$r_{BH} = p^2 \frac{\rho^2}{R_H} = 0.5^2 \frac{(1 \cdot 10^3)^2}{100 \cdot 10^3} = 2.5 \text{ Ом.}$$

У результаті одержимо контур, що зображений на рис. 4.25.

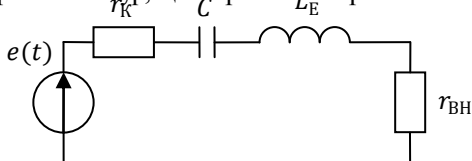


Рис. 4.25

Добротність контуру із урахуванням внесених опорів

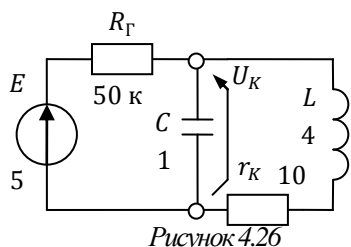
$$Q = \frac{\rho}{r_K + r_{BH}} = \frac{1000}{7.5 + 2.5} = \frac{1000}{10} = 100.$$

Вхідний опір контуру на резонансі

$$Z_{BX}(\omega_0) = r_K + r_{BH} = 7.5 + 2.5 = 10 \text{ Ом.}$$

Відповідь: $Z_{BX}(\omega_0) = 10$ Ом, $Q = 100$.

Приклад 4.13. У колі (рис. 4.26) визначити добротність, смугу пропускання, напругу контуру $|U_K(\Delta f)|$, побудувати її залежність. Числові значення елементів наведені на схемі: ємності в нФ, індуктивності в мГн, напруга в В, опори R_Γ в кОм, r_K в Ом.



Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати в одиницях: опір – кОм, індуктивність – мГн, ємність – нФ.

Резонансна частота контуру

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 1}} = 0.5 \frac{\text{рад}}{\text{мкс}} = 0.5 \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{0.5 \cdot 10^6}{2\pi} = 79.58 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

Характеристичний опір

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \text{ кОм.}$$

Генератор підключений до паралельного контуру (рис. 4.27). Для того, щоб врахувати вплив опора генератора на контур потрібно перетворити джерело напруги на джерело струму (рис. 4.27 а)

$$J = \frac{E}{R_\Gamma} = \frac{5}{50} = 0.1 \text{ мА.}$$

У результаті одержимо, що опір R_Γ підключений паралельно до контуру (рис. 4.27 а).

Внесений опір (рис. 4.27 б) з боку генератора

$$r_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R_\Gamma} = \frac{(2 \cdot 10^3)^2}{50 \cdot 10^3} = 80 \text{ Ом.}$$

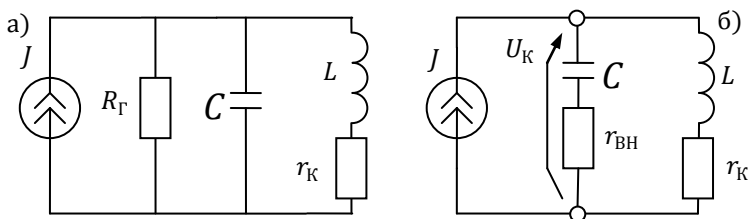


Рисунок 4.27

Добротність контуру із урахуванням внесеного опору

$$Q = \frac{\rho}{r_K + r_{BH}} = \frac{2 \cdot 10^3}{20 + 80} = 20.$$

Смуга пропускання

$$\Pi = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{0.5 \cdot 10^6}{20} = 2.5 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\Pi_{Гц} = \frac{f_0}{Q} = \frac{79.58 \cdot 10^3}{20} = 3.98 \cdot 10^3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Напруга на контурі за допомогою закону Ома

$$U_K = I_K Z_K = J \cdot Z_K$$

Вхідний опір паралельного контуру через узагальнену розстройку

$$Z_K = \frac{R_E}{1 + j\xi} = \frac{\rho Q}{1 + j\xi} = \frac{2 \cdot 20}{1 + j\xi} = \frac{40}{1 + j\xi}.$$

У результаті напруга на контурі набуде вигляду

$$\dot{U}_K = J \cdot \frac{\rho Q}{1 + j\xi} = 0.1 \cdot \frac{40}{1 + j\xi} = \frac{4}{1 + j\xi}.$$

Модуль напруги

$$|U_K(\xi)| = \frac{4}{\sqrt{1^2 + \xi^2}}$$

Абсолютна розстройка контуру

$$\xi = 2Q \frac{\Delta f}{f_0} = 2 \cdot 20 \frac{\Delta f}{79.58 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^{-4} \Delta f.$$

Амплітуда напруги на контурі (рис. 4.28)

$$|U_K(\Delta f)| = \frac{4}{\sqrt{1^2 + \xi^2}} = \frac{4}{\sqrt{1^2 + (5 \cdot 10^{-4} \Delta f)^2}}.$$

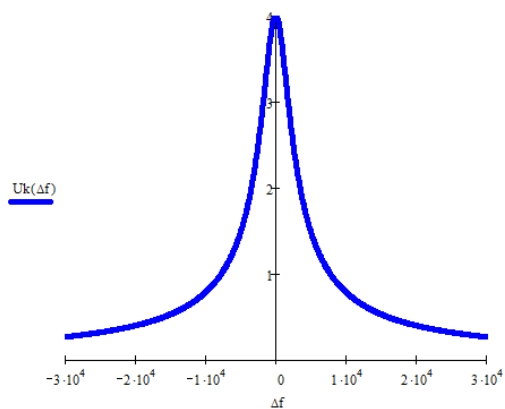


Рисунок 4.28

Відповідь: $Q = 20, \Pi = 2.5 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, |U_K(\xi)| = 4/\sqrt{1^2 + \xi^2}.$

4.3.2. Зв'язані резонансні контури

Ступінь наближення АЧХ смугового фільтра до ідеальної АЧХ, показаної на рис. 4.29, оцінюється *коефіцієнтом прямокутності*, який визначається як відношення смуг частот на рівні 0,707 та 0,1: $K_{\Pi} = \Pi_{0,7} / \Pi_{0,1}$. Можна показати, що у резонансного контура $K_{\Pi} = 0,1$, тоді як у ідеального фільтра $K_{\Pi} = 1$.

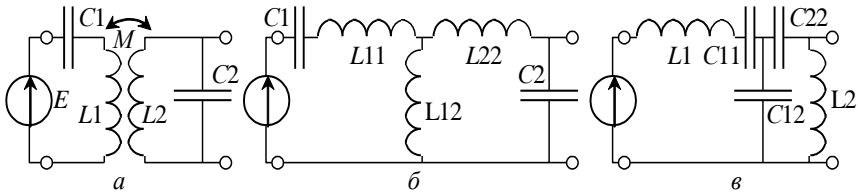


Рис. 4.29

Значно кращу прямокутність мають АЧХ зв'язаних резонансних контурів. Це такі контури, що мають спільні елементи, зазвичай реактивні. На рис. 4.29 показано схеми *зв'язаних контурів*: з трансформаторним, автотрансформаторним та ємнісним зв'язками. Міра зв'язку характеризується *коефіцієнтом зв'язку*, який для схеми, зображеної на рис. 4.29, а, визначається за формулою

$$K_{зв} = M / \sqrt{L_1 L_2} = \omega M / \sqrt{\omega L_1 \omega L_2}.$$

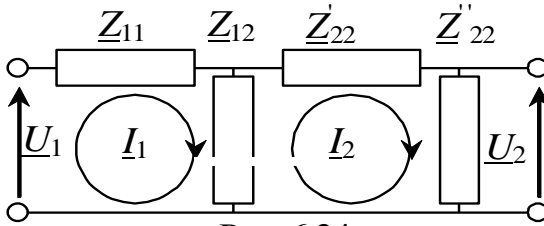


Рис. 4.30

Для аналізу ЧХ використаємо узагальнену схему зв'язаних контурів (рис. 4.30), в якій елементом зв'язку є опір $Z_{12} = jX_{зв}$. Знаходимо комплекс-

ний коефіцієнт передачі напруги $\underline{K}_U = \frac{\Delta_{12} \underline{Z}_{22}''}{\Delta} = \frac{jX_{3B} \underline{Z}_{22}''}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + X_{3B}^2}$, де

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{22}' + \underline{Z}_{22}''$. Зазвичай зв'язані контури виконуються на ідентичних компонентах, отже $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = R + jX = R(1 + j\chi)$. Тоді

$$\underline{K}_U = \frac{jX_{3B} \underline{Z}_{22}''}{\underline{Z}^2 + X_{3B}^2} = \frac{\underline{Z}_{22}''}{R} \cdot \frac{jA}{(1 - \chi^2 + A^2) + j2\chi}, \quad (4.28)$$

де $\chi = X/R$ — узагальнене розстроєння, а $A = X_{3B}/R$ називається *параметром зв'язку*. Вираз для АЧХ знаходимо з (4.28) як модуль \underline{K}_U , а саме:

$$K_U(\chi) = \frac{\underline{Z}_{22}''}{R} \cdot \frac{A}{\sqrt{(1 - \chi^2 + A^2)^2 + 4\chi^2}}. \quad (4.29)$$

Аналізуючи (4.29), можна показати, що максимальне значення коефіцієнта передачі напруги дорівнює $K_{Um} = \underline{Z}_{22}''/2R$. Розглянемо зведену АЧХ

$$n_2(\chi) = \frac{K_U(\chi)}{K_{Um}} = \frac{2A}{\sqrt{(1 - \chi^2 + A^2)^2 + 4\chi^2}}. \quad (4.30)$$

Функція $n_2(\chi)$ називається *рівнянням резонансної кривої зв'язаних контурів*. Її графіки за різних значень A показано на рис. 4.25, з якого видно, що АЧХ має вигляд двогорбої кривої при $A > 1$ і одnogорбої — при $A < 1$. Зв'язок при $A = 0$ називається *критичним*. Для перерахування зведеної АЧХ у незведену треба $n_2(\chi)$ помножити на K_{Um} та перерахувати χ в частоту, як було показано вище (див. (4.21)). Знайдемо *смуку пропускання зв'язаних контурів*. Для цього визначимо граничні розстроєння, виходячи з умов (див. рис. 4.31).

$$n_2(\chi_{rp}) = 1/\sqrt{2} \quad \text{при} \quad A \geq 1, \quad (4.31)$$

$$n_2(\chi_{rp})/n_2(0) = 1/\sqrt{2} \quad \text{при} \quad A \leq 1. \quad (4.32)$$

Зауважимо, що при $A > 2,41$ провал на двогорбій кривій спускається нижче від рівня 0,7, так що утворюються дві окремі смуги. Тому зв'язок, за якого $A > 2,41$, не застосовується. З рівнянь (4.31), (4.32) знаходимо:

$$\chi_{rp} = \pm \sqrt{A^2 + 2A - 1} \quad \text{при} \quad 1 \leq A \leq 2,41, \quad (4.33)$$

$$\chi_{rn} = \pm \sqrt{\sqrt{2(1 + A^4)} + A^2 - 1} \quad \text{при} \quad 0 < A \leq 1.$$

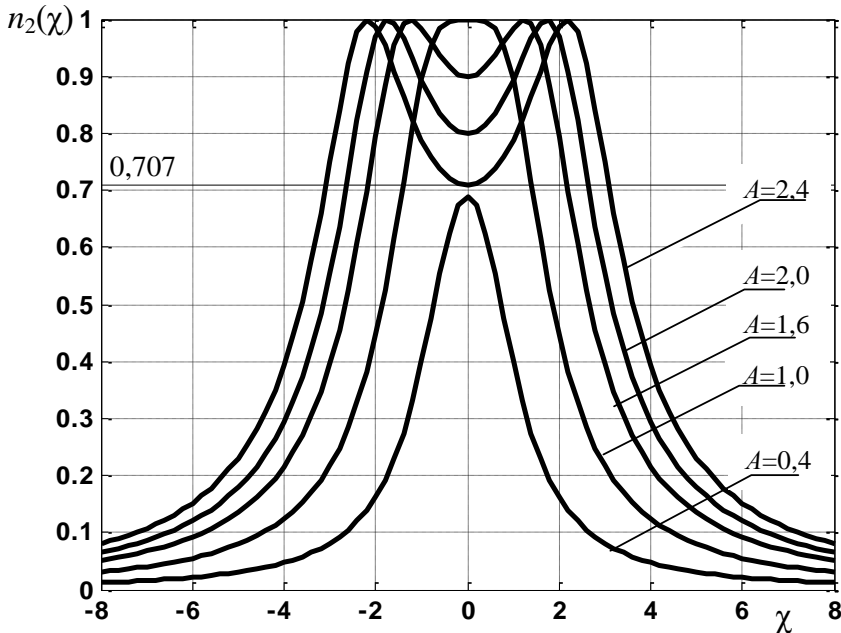


Рис. 4.31

Виразивши частоту через узагальнене розстроєння, одержимо формулу для смуги пропускання

$$\Pi_{0,7} = \chi_{\text{гр}} f_p / Q. \quad (4.34)$$

Розрахувавши за виразом (6.30) смугу частот на рівні 0.1, знаходимо коефіцієнт прямокутності

$$K_{\Pi} = \sqrt{(A^2 + 2A - 1) / (A^2 + 20A - 1)}.$$

Так, при $A = 1$ і $A = 2,41$ маємо $K_{\Pi} = 0,2$ та $0,43$, що суттєво більше, ніж у поодинокій контурі.

КМ 4.10. Виконати завдання 8, 9, 10 з підрозділу 4.5.3.

Приклад 4.14. Розрахувати електричні параметри магнітозв'язаних котушок, що будуть використані у зв'язаних контурах підсилювача проміжної частоти з тим, щоб мати частоту настроювання $f_p = 465$ кГц, смугу пропускання $\Pi_{0,7} = 20$ кГц, нерівномірність у смузі пропускання $\Delta K_{\Pi} = 3$ дБ.

Вихідний опір попереднього ступеня підсилювача $R_{\text{вих}} = 50$ кОм, вхідний опір наступного ступеня $R_{\text{вх}} = 1$ кОм. Котушки мають бути ідентичними і мати добротність $Q_L \leq 150$.

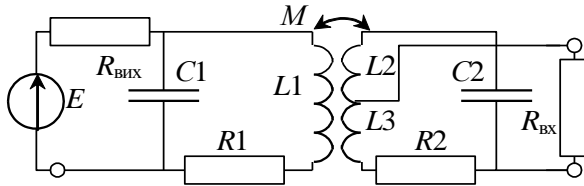


Рис. 4.32

Розв'язання. Замінивши попередній ступінь еквівалентним генератором з опором $R_{\text{вих}}$, складаємо розрахункову схему (рис. 4.32). У вторинному контурі застосуємо часткове ввімкнення навантаження, оскільки воно має малий опір. Заданій нерівномірності $\Delta K_U = 3$ дБ відповідає АЧХ двогорбого типу з провалом до рівня $n_2(0) = 1/\sqrt{2}$ (див. рис. 4.32), що відповідає параметру зв'язку $A = 2,4$. Підставивши це значення в (4.33), одержимо $\chi_{\text{гр}} = \pm 3$. За допомогою (4.34) знаходимо $Q_e = \chi_{\text{гр}} f_p / \Pi_{0,7} = 46,2$. Задамося ємностями $C_1 = C_2 = 470$ пФ і вирахуємо характеристичний опір $\rho = 1/2\pi f_p C = 726$ Ом, а також еквівалентний опір втрат $R_e = \rho/Q_e = 15,7$ Ом та внесений опір з боку джерела $R'_{\text{вих}} = \rho^2/R_{\text{вих}} = 10,6$ Ом. Отже, опір втрат котушки має бути $R_{\text{к}} = R_e - R'_{\text{вих}} = 5,1$ Ом. Добротність котушки $Q_L = \rho/R_{\text{к}} = 147$, що задовольняє умову $Q_L < 150$. Внесений опір з боку навантаження $R'_{\text{вх}} = \rho^2/R_{\text{вх}}$ покладемо рівним $R'_{\text{вих}}$. Тоді коефіцієнт ввімкнення $p = \sqrt{R'_{\text{вх}} R_{\text{вх}}} / \rho = 0,14$. Знаходимо: індуктивності $L_1 = 1/4\pi^2 f_p^2 C = 250$ мкГн, $L_2 + L_3 = L_1$, $L_3 = pL_1 = 35$ мкГн, $L_2 = L_1 - L_3 = 215$ мкГн, коефіцієнт зв'язку $K_{\text{зв}} = A/Q_e = 0,033$, взаємну індуктивність $M = K_{\text{зв}} L_1 = 8,3$ мкГн. Таким чином, котушка первинного контура повинна мати індуктивність $L_1 = 250$ мкГн, опір втрат $R_{\text{к}} = 5,1$ Ом і добротність $Q_L = 147$. Котушка вторинного контура при тих самих параметрах має середній вивід, причому індуктивності $L_2 = 215$ мкГн, $L_3 = 35$ мкГн. Взаємна індуктивність $M = 8,3$ мкГн.

Приклад 4.15. У схемі (рис. 4.33) на частоті $f = 160$ кГц визначити значення взаємної індуктивності M . Числові значення елементів: $C = 1$ нФ, $R = 10$ Ом, $L_1 = 3$ мГн, $L_2 = 8$ мГн.

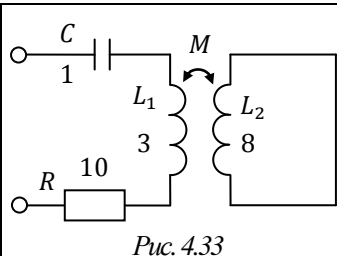


Рис. 4.33

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати в одиницях: ємності в нФ, індуктивності в мГн, частота в рад/мкс.

Визначимо частоту

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 160 \cdot 10^3 \cong 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{рад}}{\text{мкс}}.$$

Внесений опір

$$Z_{\text{ВН}} = -\frac{Z_{3В}^2}{Z_2} = -\frac{Z_{3В}^2}{Z_{L2}} = -\frac{(j\omega M)^2}{j\omega L_2} = -j\omega \frac{M^2}{L_2}.$$

Вхідний опір кола (рис. 4.34)

$$\begin{aligned} Z_{\text{ВХ}} &= R + Z_C + Z_{L1} + Z_{\text{ВН}} = \\ &= R + j\omega L_1 - j\omega \frac{M^2}{L_2} + \frac{1}{j\omega C} = \\ &= R + j\omega L_1 - j\omega \frac{M^2}{L_2} - j \frac{1}{\omega C}. \end{aligned}$$

Виділимо уявну складову вхідного опору

$$\text{Im}[Z_{\text{ВХ}}] = \omega L_1 - \omega \frac{M^2}{L_2} - \frac{1}{\omega C}.$$

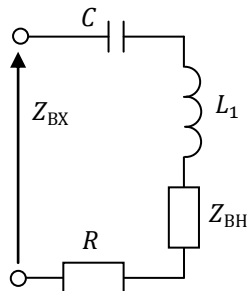


Рис. 4.34

Прирівняємо цей вираз до нуля

$$\text{Im}[Z_{\text{ВХ}}] = 0 = \omega L_1 - \omega \frac{M^2}{L_2} - \frac{1}{\omega C} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot \frac{M^2}{8} - \frac{1}{1 \cdot 1} = 2 - \frac{M^2}{8}.$$

Звідси визначимо

$$M = \sqrt{16} = 4 \text{ мГн}.$$

Відповідь: $M = 4$ мГн.

4.4. Частотний метод аналізу лінійних кіл у режимі періодичних коливань

Аналіз *частотним методом* проводиться в такій послідовності: за заданою вхідною дією у вигляді періодичного коливання напруги або струму знаходять вираз для комплексної амплітуди n -ї гармоніки (див. (4.5)); згідно з принципом накладання кожній гармоніці вхідної дії відповідає гармоніка вихідного коливання, комплексна амплітуда якої визначається як

$$\underline{C}_{n \text{ вих}} = \underline{K}(n\omega_1) \underline{C}_{n \text{ вх}},$$

де $\underline{K}(n\omega_1)$ – значення передавальної функції на частоті n -ї гармоніки. Визначивши $\underline{C}_{n \text{ вих}}$, можна знайти амплітуди й фази гармонік вихідного коливання:

$$C_{n \text{ вих}} = K(n\omega_1) C_{n \text{ вх}}, \quad \varphi_{n \text{ вих}} = \varphi_{n \text{ вх}} + \varphi_K(n\omega_1), \quad (4.35)$$

тобто спектри амплітуд і фаз на виході, після чого вихідне коливання можна подати рядом Фур'є в комплексній або тригонометричній формі:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_{n \text{ вих}} e^{jn\omega_1 t} = \frac{C_{0 \text{ вих}}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{n \text{ вих}} \cos(n\omega_1 t - \varphi_{n \text{ вих}}). \quad (4.36)$$

На відміну від гармонічного аналізу, коли коливання подається рядом Фур'є, обернена задача – *гармонічний синтез* – універсального розв'язку не має. Тому часову модель $x(t)$ знаходять зазвичай наближено, скорочуючи ряд (4.36), відкинувши малі гармоніки. Цей метод зручний для аналізу вузькосмутових кіл, в яких на вихід передається лише мала кількість гармонік.

Часто буває потрібним знайти не вихідне коливання, а його спектр. Для цього користуються співвідношеннями (4.35), згідно з якими спектр амплітуд вихідного коливання знаходять, помножуючи амплітуди гармонік вхідного коливання на величину передаточної функції на частоті даної гармоніки, а спектр фаз – підсумовуючи фази вхідних гармонік зі зсувом фаз в колі, тобто з величиною ФЧХ на частотах гармонік.

КМ 4.11. Виконати завдання з підрозділу 4.5.4.

Приклад 4.16. На виході двопівперіодного випрямляча отримують напругу у вигляді косинусоїдальних імпульсів (див. рис. 4.35). Ця напруга передається в навантаження через фільтр нижніх частот, АЧХ якого описується виразом $K_U(\omega) = 1/\sqrt{1+(\omega\tau)^2}$. Якою має бути стала часу τ , щоб перша гар-

моніка була ослаблена у 10 разів? Розрахувати спектр амплітуд напруги у навантаженні.

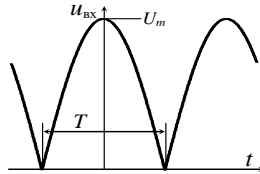


Рис. 4.35

Розв'язання. За формулою (4.5) знаходимо комплексну амплітуду n -ї гармоніки напруги на вході фільтра

$$\underline{U}_{n\text{вх}} = \frac{2}{T} \int_0^T U_m \cos \frac{\pi}{T} t \cdot \exp(-jn \frac{2\pi}{T} t) dt = -\frac{4U_m (-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)},$$

модуль якої дорівнює амплітуді n -ї гармоніки:

$$U_{n\text{вх}} = \frac{4U_m}{\pi(4n^2 - 1)}. \quad (4.37)$$

За умовою задачі $K_U(\omega_1) = 1/\sqrt{1 + (\omega_1\tau)^2} = 1/10$, де $\omega_1 = 2\pi/T$, звідки $\tau = 5T/\pi$. Тоді

$$K_U(n\omega_1) = 1/\sqrt{1 + (10n)^2}. \quad (4.38)$$

Амплітуди гармонік вихідної напруги знаходимо як $U_{n\text{вих}} = K_U(n\omega_1)U_{n\text{вх}}$. Підставляючи в (4.37) й (4.38) $n = 0, 1, 2, \dots$ і враховуючи, що стала складова дорівнює $U_{0\text{вх}}/2$, розраховуємо спектри амплітуд вхідної та вихідної напруг у зведених координатах $\bar{U}_{n\text{вх}} = U_{n\text{вх}}/U_m$, $\bar{U}_{n\text{вих}} = U_{n\text{вих}}/U_m$. Результати розрахунків наведено у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

n	0	1	2	3	4	5
$\bar{U}_{n\text{вх}}$	0,64	0,42	0,08	0,04	0,02	0,01
$K_U(n\omega_1)$	1,0	0,100	0,050	0,033	0,025	0,020
$\bar{U}_{n\text{вих}}$	0,64	0,042	0,004	0,001	0	0

4.5. Комп'ютерне моделювання

4.5.1. Спектральний аналіз

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- методики спектрального аналізу за методом кутів відсікання;
- спектрів косинусоїдальних імпульсів за різних кутах відсікання;
- методики спектрального аналізу за рядами Фур'є;
- спектрів прямокутних імпульсів за різних тривалостей і періодів.

1. Скласти схему, зображену на рис. 4.36, в якій функціональний генератор виробляє змінну напругу із заданою амплітудою, джерело E забезпечує постійну напругу зміщення, нелінійний елемент – діод VD має властивість пропускати струм в одному напрямку, коли напруга на його аноді додатна, що дає змогу отримати косинусоїдальні імпульси з певним кутом відсікання.

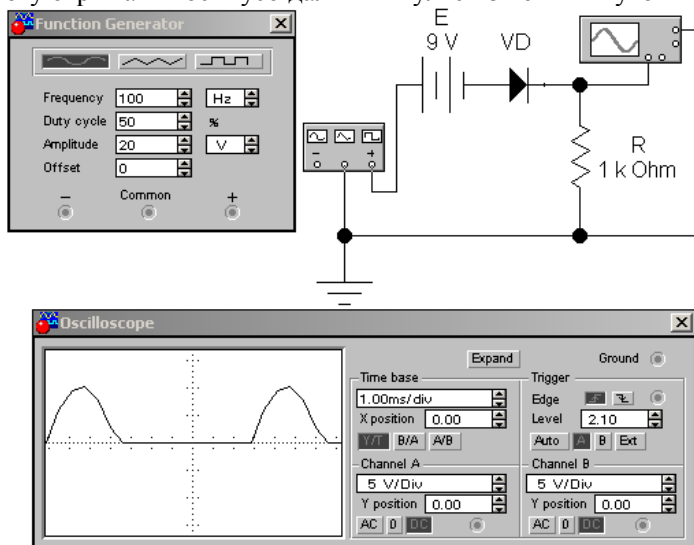


Рис. 4.36

Сформувати косинусоїдальні імпульси з кутами відсікання $\theta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ і амплітудою $U = 10$ В. За цими даними розрахувати амплітуду змінної напруги і напругу зміщення. З осцилограми (див. рис. 4.37) знаходимо:

$$U_0 = U_m \cos \theta, \quad U = U_m (1 - \cos \theta),$$

звідки отримуємо розрахункові формули

$$U_m = \frac{U}{1 - \cos\theta}, \quad U_0 = \frac{U \cos\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Встановити розраховані величини амплітуди змінної напруги і постійної напруги зміщення. Виміряти осцилографом амплітуду U і тривалість $2\Delta t$ імпульсів. Визначити кут відсікання за формулою

$$\theta = 2\pi \frac{\Delta t}{T}.$$

Порівняти виміряні параметри імпульсів з розрахованими.

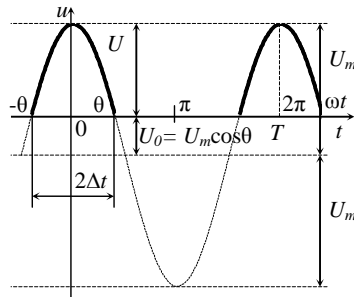


Рис. 4.29

Отримати спектральні діаграми для кожного з кутів відсікання, як показано на рис. 4.30. Для цього в меню «Analysis» треба вибрати опцію «Fourier». На моніторі відобразиться вікно (див. рис. 4.31) з отриманою спектральною діаграмою. Підвівши курсор до лінії спектра, можна виміряти амплітуду відповідної гармоніки, значення якої наводиться в таблиці. Наприклад, амплітуда першої гармоніки на рис. 4.31 становить 2,462 В.

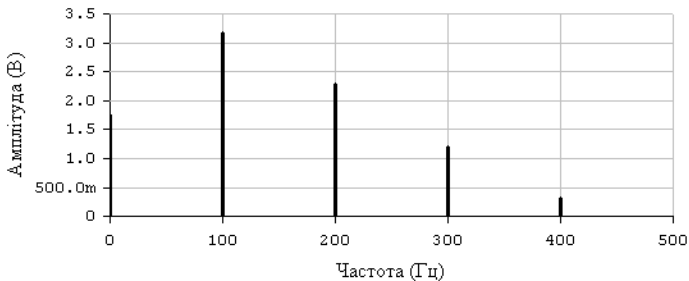


Рис. 4.30

Розрахувати амплітуди перших чотирьох гармонік і постійну складову за формулою $U_n = U f_n(\theta)$, де $f_n(\theta)$ – функції кута відсікання, графіки якої наведено на рис. 4.2. Порівняти розраховані та виміряні величини складових спектрів.

2. Дослідити спектри прямокутних імпульсів, перевірити висновки, отримані у прикладі 4.2. Для цього скласти схему, зображену на рис. 4.32, переключивши генератор у режим прямокутних імпульсів. Встановити на генераторі амплітуду 10 В, постійну напругу зміщення «Offset» 10 В, частоту 5 кГц, шпаруватість «Duty cycle» 20%, що визначається як тривалість імпульсу τ у відсотках до періоду слідування імпульсів T , а саме

$$\delta = \frac{\tau}{T} \cdot 100\%.$$

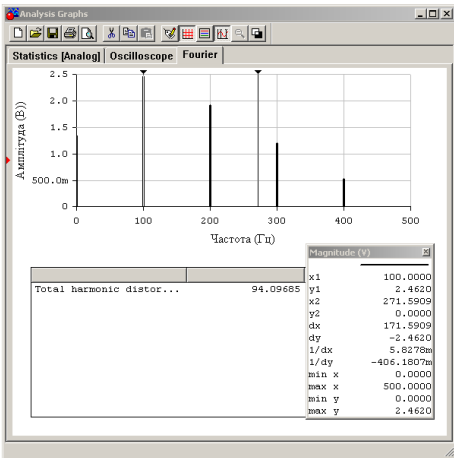


Рис. 4.31

Відкрити діалогове вікно «Fourier Analysis» і встановити в ньому основну частоту (частоту першої гармоніки) $f_1 = 5$ кГц і кількість гармонік 20. Виконати спектральний аналіз командою «Simulate». При цьому буде отримана спектральна діаграма (див. рис. 4.33), в якій за допомогою курсорів можна визначити частоти гармонік і вузлів, де амплітуди гармонік дорівнюють нулю. Згідно з (4.6) частоти гармонік мають бути кратні до частоти першої гармоніки, а частоти вузлів у спектрі припадають на частоти, що дорівнюють

$$f_k = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\delta T} = \frac{f_1}{\delta}.$$

Зменшити тривалість імпульсу вдвічі, встановивши шпаруватість 10%. Зняти спектральну діаграму і зробити висновок щодо зміни спектра у разі зміни тривалості імпульсу.

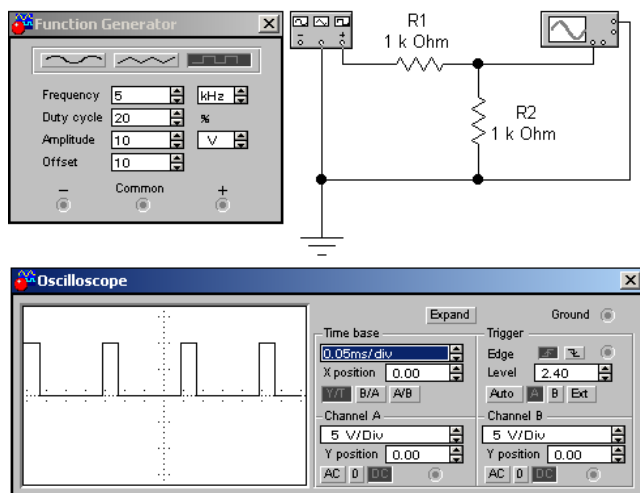


Рис. 4.32

Встановити попередню тривалість імпульсу і зменшити частоту імпульсів до 1 кГц. Щоб тривалість імпульсу не змінилась, потрібно зменшити шпаруватість у п'ять разів, тобто до 4%. У діалоговому вікні «Fourier Analysis» встановити основну частоту $f_1 = 1$ кГц і кількість гармонік 100. Отримати спектральну діаграму і з'ясувати, як змінюється спектр у разі зміни частоти імпульсів при однаковій їх тривалості. Для більшої наочності при порівнянні спектрів їх бажано оформити так, як показано на рис. 4.34. Для цього їх треба скопіювати з вікна (рис. 4.33) у буфер обміну за допомогою лінійки інструментів. Далі ці спектральні діаграми можна відкрити у документі Word.

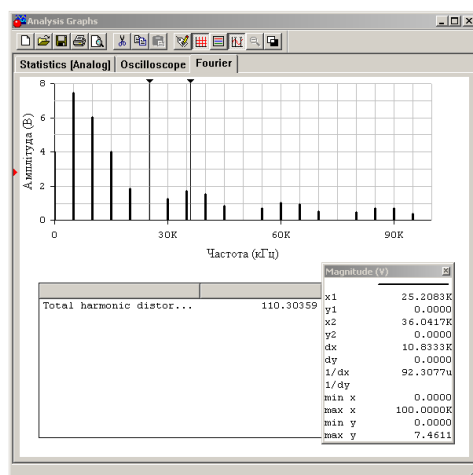


Рис. 4.33

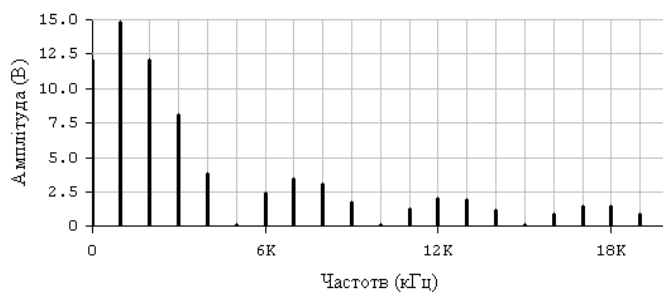


Рис. 4.34

4.5.2. Частотні характеристики

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- частотних характеристик RC -та RL -ланцюжків;
- методики експериментального визначення параметрів частотних характеристик: смуги пропускання, смуги затримання, граничних частот;
- залежності параметрів частотних характеристик від параметрів елементів схеми;
- частотних характеристик квазірезонансних кіл.

1. Дослідити частотні характеристики елементарних RC - та RL -ланцюжків, склавши схеми, зображені на рис. 4.35 і 4.36. Встановити параметри елементів схем згідно з табл. 4.2 відповідно до варіанта.

Таблиця 4.2

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R1, R2$ кОм	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
$L1, L2$ мГн	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$C1, C2$ нФ	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50

Перемикачем $S1$ сформувати по черзі елементарні RC -, LR -ланцюжки у схемах, зображених на рис. 4.35 і 4.36. Для кожного з них зняти з екрана характеріографа (Bode Plotter) амплітудно-частотні і фазочастотні характеристики коефіцієнта передачі напруги в лінійних і логарифмічних координатах. Частотні характеристики потрібно вимірювати за допомогою курсора, який можна переміщувати лівою клавішею миші. При цьому на табло, розташованому справа знизу на передній панелі характеріографа, відображаються координати точки перетину візирної риски з графіком характеристики. Виміряти граничні частоти, визначити смуги пропускання і затримання. Виразити граничні частоти через відомі параметри елементів схем за формулою

$$f_{\text{гр}} = \frac{1}{2\pi\tau},$$

де $\tau = RC$ — стала часу RC -ланцюжків, $\tau = L / R$ — стала часу LR -ланцюжків. Порівняти виміряні і розраховані значення граничних частот.

Збільшити, а потім зменшити ємності й індуктивності досліджуваних ланцюжків удвічі і повторити виміри частотних характеристик. Пояснити

отримані результати. Зробити висновки щодо можливості застосування досліджених схем в якості фільтрів нижніх і верхніх частот.

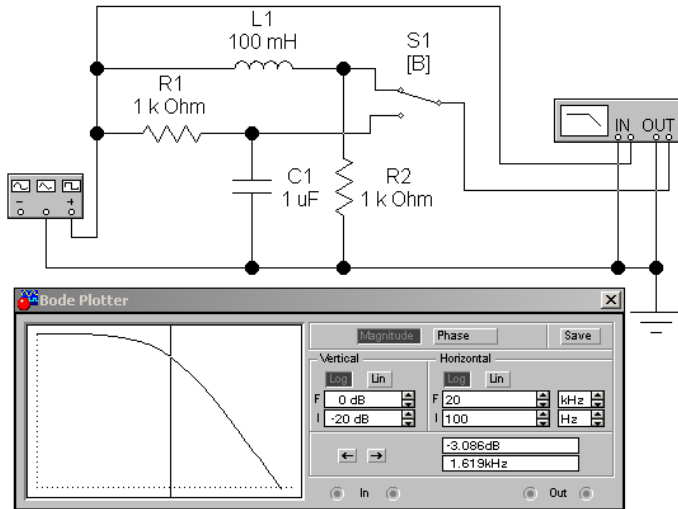


Рис. 4.35

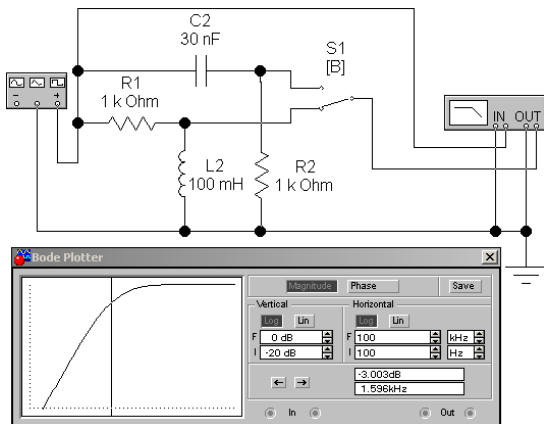


Рис. 4.36

Розрахувати за заданими параметрами частотні характеристики схем, які є фільтрами нижніх частот першого порядку за формулами (4.39), а які є фільтрами верхніх частот першого порядку — за формулами (4.40).

$$K_U = 1/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}, \quad \varphi_K = -\arctg\omega\tau, \quad (4.39)$$

$$K_U(\omega) = \omega\tau/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}, \quad \varphi_K(\omega) = \pi/2 - \arctg\omega\tau. \quad (4.40)$$

Для кожної схеми побудувати на одному графіку експериментально зняті амплітудно-частотні характеристики при різних сталих часу і розраховану характеристику для однієї сталої часу. На другому графіку для кожної схеми побудувати фазочастотні характеристики, експериментально зняті, і одну розрахункову.

2. Дослідити АЧХ подільника напруги і методику її корекції, склавши схему, зображену на рис. 4.37. У цій схемі опори R1, R2 утворюють подільник напруги. Ємність C2 моделює конструктивну (паразитну) ємність. Дослідити вплив величини цієї ємності на смугу пропускання подільника. Для цього зняти АЧХ і визначити граничні частоти при таких значеннях ємності C2: 10, 20, 50 пФ. Щоб скоригувати АЧХ подільника, паралельно опору R1 вмикають коригуючу ємність C1. Встановити величину ємності C2 10 пФ. Перестроювати ємність C1 так, щоб скоригувати АЧХ. Визначити величину ємності C1, що відповідає найкращій корекції. Зняти АЧХ при оптимальній величині коригуючої ємності. Побудувати всі зняті АЧХ на одному графіку з метою їх порівняння.

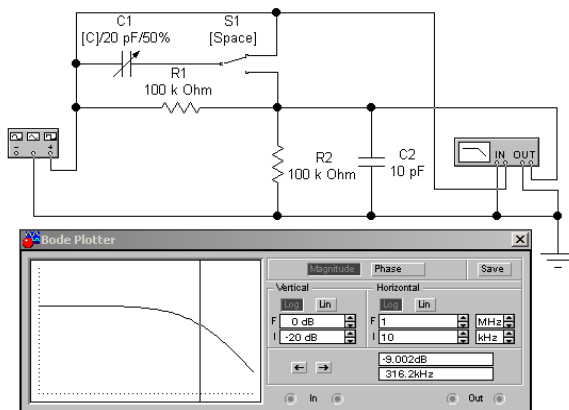


Рис. 4.37

3. Дослідити квазірезонансне коло, що має назву «Міст Віна» (рис. 4.38). Зняти амплітудно-частотні і фазочастотні характеристики коефіцієнта передачі напруги при різних значеннях ємностей: 100, 250, 500 пФ. Визначити граничні частоти, смуги пропускання і затримання, а також квазірезонансну частоту і їх залежність від параметрів схеми. Квазірезонансна частота відповідає нульовому зсуву фаз між вихідною і вхідною напругами.

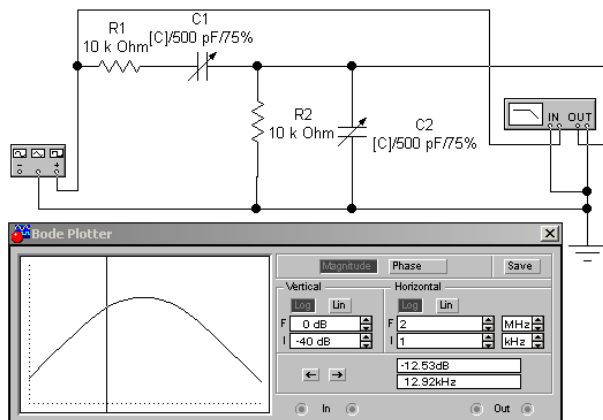


Рис. 4.38

4.5.3. Резонансні кола

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- первинних і вторинних параметрів резонансних контурів;
- частотних характеристик резонансних контурів;
- методики настроювання резонансних контурів;
- впливу параметрів джерела сигналу і навантаження на частотні характеристики резонансних контурів;
- методики настроювання пов'язаних резонансних контурів;
- частотних характеристик пов'язаних резонансних контурів;
- впливу параметрів навантаження на частотні характеристики пов'язаних резонансних контурів.

1. Вивчити первинні і вторинні параметри резонансного контура та методи їх визначення. Скласти схему, зображену на рис. 4.39. Перемикачем

S вимкнути опір навантаження. Встановити параметри елементів контура згідно з табл. 4.3.

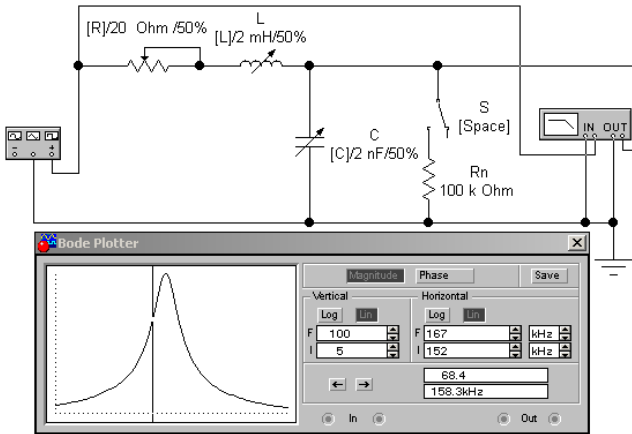


Рис. 4.39

Таблиця 4.3

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R, Ом	10	10	10	10	10	20	20	20	20	20
L, мГн	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
C, нФ	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Розрахувати резонансну частоту за формулою

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Встановити на характеріографі діапазон вимірюваних частот у межах $f_p \pm 20 \text{ кГц}$. Дослідити частотні характеристики послідовного резонансного контура. Зняти з екрана характеріографа резонансну криву контура. Виміряти резонансну частоту і смугу пропускання $\Pi = f_{гр2} - f_{гр1}$. Порівняти виміряну і розраховану резонансні частоти. Розрахувати добротність контура за формулою

$$Q = \frac{f_p}{\Pi}.$$

Розрахувати характеристичний опір і добротність контура за заданими параметрами його елементів:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q = \frac{\rho}{R}.$$

Порівняти виміряну і розраховану добротності контура.

2. Дослідити, як залежить резонансна частота, смуга пропускання, добротність від зміни параметрів контура. Зменшити ємність на 10% і повторити розрахунки і вимірювання резонансної частоти, смуги пропускання і добротності, як у п. 1. Повернути попереднє значення ємності, збільшити на 10% індуктивність і повторити виміри і розрахунки. Збільшити опір втрат у контурі R удвічі, повторивши виміри і розрахунки. З метою порівняння звести у таблицю значення параметрів контура, виміряні і розраховані величини резонансної частоти, смуги пропускання, добротності, отримані у пунктах 1, 2.

3. Дослідити вплив опору навантаження R_n на частотні характеристики контура. Перемикачем S підключити опір навантаження 100 кОм до контура. Виміряти резонансну частоту і смугу пропускання, за якими визначити еквівалентну добротність. Розрахувати еквівалентну добротність за формулою

$$Q_e = \frac{\rho}{R + R_{\text{вн}}},$$

де внесений опір

$$R_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R_n}.$$

Порівняти виміряне і розраховане значення добротності.

4. Дослідити частотні характеристики паралельного резонансного контура. Скласти схему паралельного контура (див. рис. 4.40). Встановити перемикачі S_1 у нижнє положення, S_2 – у верхнє положення, перемикачем S_3 вимкнути опір навантаження. Встановити параметри контура згідно з табл. 4.4.

Розрахувати резонансну частоту за формулою

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

де $L = L_1 + L_2$.

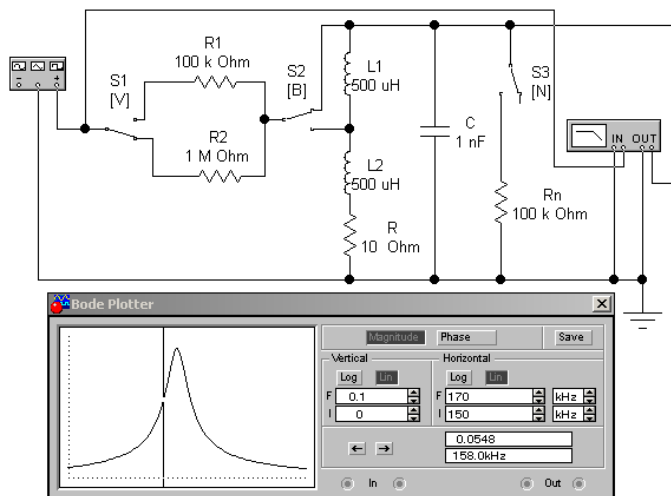


Рис. 4.40

Встановити на характеріографі діапазон вимірюваних частот у межах $f_p \pm 20$ кГц.

Таблиця 4.4

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R , Ом	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
L_1, L_2 мГн	0,5	1	1,5	2	2,5	0,5	1	1,5	2	2,5
C , нФ	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50

5. Дослідити вплив опору генератора на частотні характеристики паралельного контура. Перемикачем S1 ввімкнути між генератором і контуром опір $R_1 = 100$ кОм, перемикач S2 встановити у верхнє положення (повне ввімкнення контура), перемикачем S3 відключити опір навантаження R_n . Зняти з екрана характеріографа резонансну криву контура. Виміряти резонансну частоту і смугу пропускання $\Pi = f_{гp2} - f_{гp1}$. Порівняти виміряну і розраховану резонансні частоти. Розрахувати добротність контура за формулою

$$Q = \frac{f_p}{\Pi}.$$

Замість опору R_1 включити опір $R_2 = 1$ МОм і повторити виміри.
Розрахувати еквівалентну добротність за формулою

$$Q_e = \frac{\rho}{R + R_{\text{вн}}},$$

де внесений опір

$$R_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R_i},$$

а внутрішній опір R_i дорівнює R_1 або R_2 . Порівняти виміряні і розраховані значення добротності.

6. Дослідити вплив на частотні характеристики часткового ввімкнення контура. Перемикачем S_1 включити між генератором і контуром опір $R_1 = 100$ кОм. Перемкнути перемикач S_2 у нижнє положення, реалізувавши часткове ввімкнення контура. Виміряти еквівалентну добротність контура за результатами вимірювань і розрахувати добротність за формулою

$$Q_e = \frac{\rho}{R + R_{\text{вн}}},$$

де внесений опір

$$R_{\text{вн}} = p^2 \frac{\rho^2}{R_i},$$

коефіцієнт ввімкнення контура

$$p = \frac{L_2}{L_1 + L_2}.$$

Порівняти виміряну і розраховану добротності.

7. Дослідити вплив опору навантаження на частотні характеристики контура. Перемикачем S_1 включити між генератором і контуром опір $R_2 = 1$ МОм. Перемикачем S_3 підімкнути до контура опір навантаження $R_n = 100$ кОм. Виміряти добротність навантаженого контура і порівняти з розрахованою добротністю за формулою

$$Q_e = \frac{\rho}{R + R_{\text{вн}}},$$

де внесений опір

$$R_{\text{вн}} = \frac{\rho^2}{R_n}.$$

8. Вивчити методику настроювання пов'язаних контурів, склавши схему, зображену на рис. 4.41. Встановити такі величини параметрів елементів схеми: $L_1 = L_2 = 1$ мГн, $R_1 = R_2 = 12$ Ом, $M = 25$ мкГн, $C_1 = C_2 = 2$ нФ. Шаг перестроювання ємностей (*Increment*) встановити рівним 1%, як показано на рис. 6.42. Перемикачем S1 відключити опір навантаження від контура. Настроїти пов'язані контури. Встановити мінімальну величину індуктивності зв'язку M. Перемикачем S2 підімкнути характеріограф до первинного контура. Змінюючи ємність C1, настроїти первинний контур на частоту 159 ± 1 кГц. Перемикачем S2 підключити характеріограф до вторинного контура. Змінюючи ємність C2 настроїти вторинний контур на частоту 159 ± 1 кГц. Збільшуючи індуктивність зв'язку M, досягти максимальної напруги на вторинному контурі. Отриманий режим називається повним резонансом, за якого коефіцієнт зв'язку $A = 1$ є критичним. Розрахувати коефіцієнт зв'язку за формулою

$$A = \frac{2\pi f M}{R}$$

і переконатися, що розрахована величина коефіцієнта зв'язку відповідає повному резонансу.

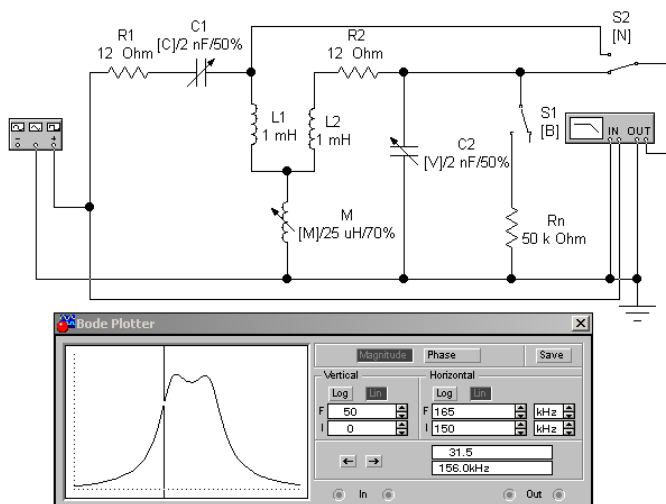


Рис. 4.41

9. Дослідити частотні характеристики пов'язаних контурів. Зняти з екрана вимірювача частотних характеристик амплітудно-частотні характеристики при критичному зв'язку, а також при зв'язку, меншому і більшому від критичного. Побудувати зняті характеристики на одному графіку. Виміряти смуги пропускання на кожній із знятих частотних характеристик і з'ясувати, як смуга пропускання змінюється зі збільшенням зв'язку. Порівняти виміряні частотні характеристики з теоретичними, наведеними на рис. 4.25.

10. Дослідити вплив навантаження на частотні характеристики пов'язаних контурів. Перемикачем S_1 підключити до вторинного контура опір навантаження $R_n = 100 \text{ kOhm}$ і повторити виміри п. 9. Порівняти частотні характеристики навантажених і ненавантажених контурів. З'ясувати, як змінюється смуга пропускання пов'язаних контурів при підключенні опору навантаження.

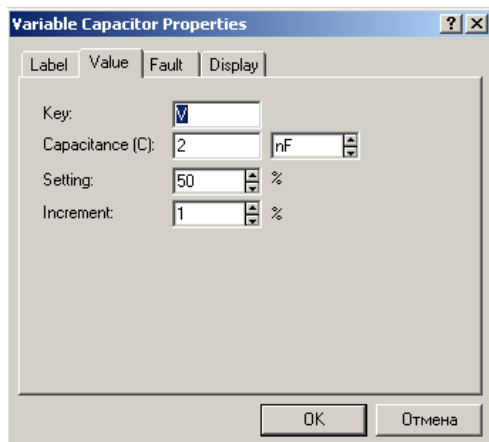


Рис. 4.42

4.5.4. Спектральний метод

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- зміни форми і спектра сигналів при проходженні через лінійні кола;
- можливостей спектрального методу аналізу проходження сигналів у лінійних колах.

1. Дослідити проходження прямокутних імпульсів напруги через резонансне коло з вузькою смугою пропускання, утворене паралельним контуром (рис. 4.43). Встановити на генераторі режим генерування прямокутних імпульсів з амплітудою 100 В і частотою 80 кГц.

Зняти амплітудно-частотну характеристику коефіцієнта передачі напруги схеми. Для цього в меню «Analysis» вибрати опцію «AC frequency». У діалоговому вікні встановити нижню і верхню частоти діапазону 80 кГц і 240 кГц, лінійний тип вертикальної і горизонтальної осей і виконати команду «Simulate», після чого відкриється вікно результату (див. рис. 4.44).

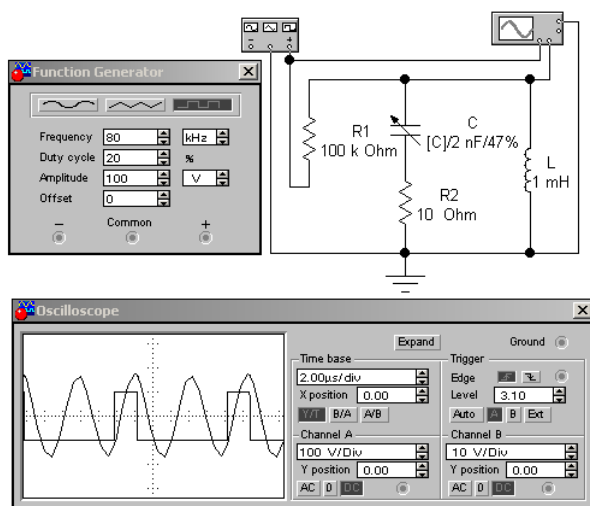


Рис. 4.43

Настроїти резонансний контур змінною ємністю. Щоб отримати можливість плавного перестроювання ємності, потрібно встановити шаг зміни ємності «Increment» 1%. За допомогою курсорів виміряти амплітуди вихідної напруги на частотах 80 кГц, 160 кГц, 240 кГц. Розрахувати величини коефіцієнта передачі напруги на цих частотах поділивши амплітуду вихідної напруги на амплітуду вхідної напруги, що дорівнює 100 В.

Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа осцилограми вхідної і вихідної напруг, звернувши увагу на зміну форми сигналу. Отримати спектральні діаграми вхідної (див. рис. 4.45) і вихідної (див. рис. 4.46) напруг за методикою, що застосована в підрозділі 4.5.1, виміряти амплітуди гармонік вхідного і вихідного сигналів. Розрахувати амплітуди гармонік на виході за формулами (4.35). Порівняти розраховані і виміряні амплітуди гармонік вхідного сигналу. Пояснити з позицій спектральних уявлень отримані результати (див. розділ 4.4).

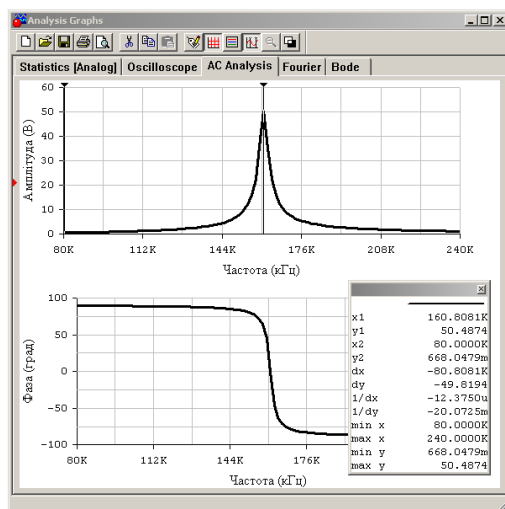


Рис. 4.44

4.6. Підсумки і самоконтроль

Цей підрозділ присвячений вивченню режимів періодичних коливань у лінійних колах. Такі режими аналізуються частотним методом, що передбачає використання частотних моделей коливань і частотних характеристик кіл. Частотні методи завдяки своїм перевагам знайшли широке застосування. Вони становлять основу базової підготовки інженера, який повинен уміти розраховувати і будувати спектральні діаграми сигналів і частотні характеристики. Корисно також знати частотні характеристики простих RC - і RL -ланцюжків та резонансних кіл, які широко застосовуються в електронній апаратурі.

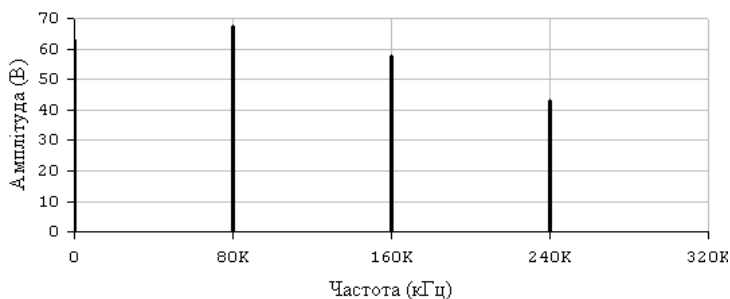


Рис. 4.45

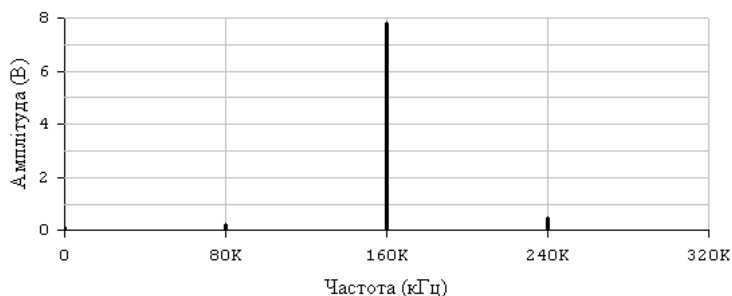


Рис. 4.46

Під час вивчення цього розділу потрібно засвоїти такі нові поняття: спектри амплітуд і фаз, комплексна схемна функція, амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики, електричний фільтр, граничні частоти, смуги пропускання і затримання, логарифмічні частотні характеристики, логарифмічні одиниці відношень – децибел та непер, резонансне коло, послідовний і паралельний резонансний контури, резонанси напруг і струмів, резонансна частота, характеристичний опір і добротність резонансного контура, резонансний опір, конструктивна та еквівалентна добротності, часткове ввімкнення контура, коефіцієнт ввімкнення, коефіцієнт прямокутності частотної характеристики,

коефіцієнт зв'язку. Частотний метод аналізу лінійних кіл розглядається також у літературі [1, гл. 2, п. 2.1], [2, гл. 7; гл. 11, п. 11.1–11.3], [3, гл. 7], [4, гл. 5, п. 5.1–5.3], [8, гл. 6, 8], [11, гл. 6, 7], [10, гл. 12], [12, гл. 6]. Проконтролювати засвоєння перелічених вище методів і понять допоможуть подані далі контрольні питання і завдання:

- Запишіть ряд Фур'є у тригонометричній і комплексній формах.
- Що таке спектри амплітуд і фаз?
- Що таке від'ємна частота?
- Що таке комплексна схемна функція, модуль і аргумент схемної функції?
- Що таке амплітудно-частотна і фазочастотна характеристики?
- Зобразіть АЧХ і ФЧХ RC - і RL -ланцюжків. Як їх ЧХ залежать від сталої часу? Чому дорівнює гранична частота?
- Які ЧХ мають ідеальні фільтри нижніх і верхніх частот, смугові та режекторні?
- Як визначаються логарифмічні одиниці — децибел і непер?
- На чому базується якісний аналіз ЧХ?
- Які кола називаються резонансними?
- Зобразіть схеми послідовного і паралельного резонансних контурів.
- Виразіть резонансну частоту, характеристичний опір і добротність через первинні параметри контура.
- Чому дорівнюють абсолютне, відносне і узагальнене розстроєння?
- Запишіть рівняння резонансної кривої.
- Чим визначається смуга пропускання резонансного контура?
- Як визначити добротність за резонансною кривою?
- Чим відрізняються резонанси напруг і струмів?
- Чому дорівнює внесений опір і який його фізичний зміст?
- Що таке конструктивна й еквівалентна добротності?
- Зобразіть схеми контурів із частковим ввімкненням другого і третього видів. Коли вживаються такі контури і які їх властивості?
- Що таке коефіцієнт прямокутності частотної характеристики?
- Зобразіть схеми зв'язаних контурів із трансформаторним, автотрансформаторним і ємнісним зв'язками. Чому дорівнює коефіцієнт зв'язку?
- Як вид ЧХ зв'язаних контурів залежить від параметра зв'язку?
- У чому полягає сутність частотного методу аналізу?

РОЗДІЛ 5. ПРОХІДНІ ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

5.1. Рівняння і параметри чотириполіусників

Між джерелом та навантаженням звичайно розташовується деяке коло (див. рис. 5.1), що має вхід, до якого підключено джерело, та вихід із навантаженням R_n . Таке коло називається *прохідним чотириполіусником* (ПЧ). У багатьох практичних задачах цікавляться тільки режимами джерела та навантаження, а решта елементів залишається поза увагою. Тоді можна розглядати ПЧ як окремий елемент (рис. 5.1), режим якого характеризується струмами i_b , i_a та напругами u_b , u_a на його вході та виході.



Рис. 5.1

Взаємодія навантаження із джерелом через ПЧ визначається залежностями між цими струмами та напругами, які розглядаються як елементні *рівняння ПЧ*. Згідно з принципом накладання, струми лінійного ПЧ можна виразити через напруги:

$$\begin{cases} i_a = g_{11}u_a + g_{12}u_b, \\ i_b = g_{21}u_a + g_{22}u_b, \end{cases} \quad (5.1)$$

де коефіцієнти g_{11} , ..., g_{22} називаються g -параметрами ПЧ. Будь-які дві змінні з чотирьох можна виразити через інші дві, що приводить до таких рівнянь ПЧ:

$$\begin{cases} u_a = r_{11}i_a + r_{12}i_b, \\ u_b = r_{21}i_a + r_{22}i_b; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} u_a = h_{11}i_a + h_{12}u_b, \\ i_b = h_{21}i_a + h_{22}u_b; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} i_a = f_{11}u_a + f_{12}i_b, \\ u_b = f_{21}u_a + f_{22}i_b; \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} u_a = a_{11}u_b + a_{12}i_b, \\ i_a = a_{21}u_b + a_{22}i_b. \end{cases} \quad (5.5)$$

Коефіцієнти цих рівнянь називаються відповідно r, h, f, a – параметрами ПЧ. Параметри будь-якої системи рівнянь ПЧ можна виразити через параметри будь-якої іншої системи, як показано далі у прикладі 5.1. Формули переходу від однієї системи параметрів до іншої наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Від і до	[G]	[R]	[H]	[A]
[G]	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{ r } \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & h \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & - a \\ 1 & -a_{11} \end{bmatrix}$
[R]	$\frac{1}{ g } \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & - a \\ 1 & -a_{22} \end{bmatrix}$
[H]	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & g \end{bmatrix}$	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} r & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & a \\ 1 & -a_{21} \end{bmatrix}$
[A]	$\frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} -g_{22} & 1 \\ - g & g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{r_{21}} \begin{bmatrix} r_{11} & - r \\ 1 & -r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} - h & h_{11} \\ -h_{22} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Приклад 5.1. Відомі g -параметри ПЧ. Знайти h -параметри.

Розв'язання. Розв'яжемо систему рівнянь (5.1) відносно u_a, i_b :

$$u_a = \frac{1}{g_{11}} \cdot i_a - \frac{g_{12}}{g_{11}} u_b, \quad i_b = \frac{g_{21}}{g_{11}} i_a + \frac{|g|}{g_{11}} u_b,$$

де $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ — визначник системи (5.1). Порівняння цих рівнянь з (5.3) показує (див. табл.5.1), що

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & |g| \end{bmatrix}.$$

Параметри ПЧ називаються *вторинними параметрами*, а параметри елементів схеми, що утворює ПЧ, — *первинними*. Встановимо зв'язок між вторинни-

ми та первинними параметрами ПЧ. Добираємо незалежні контури так, щоб вхід ПЧ був в a -му контурі, а вихід — у b -му (рис. 5.1). Склавши контурні рівняння, розв'яжемо їх відносно струмів:

$$i_a = \frac{\Delta_{aa}^R}{\Delta^R} \cdot u_a - \frac{\Delta_{ba}^R}{\Delta^R} \cdot u_b, \quad i_b = \frac{\Delta_{ab}^R}{\Delta^R} \cdot u_a - \frac{\Delta_{bb}^R}{\Delta^R} \cdot u_b.$$

Порівнюючи ці вирази з (3.30), знаходимо:

$$g_{11} = \frac{\Delta_{aa}^R}{\Delta^R}, \quad g_{12} = -\frac{\Delta_{ba}^R}{\Delta^R}, \quad g_{21} = \frac{\Delta_{ab}^R}{\Delta^R}, \quad g_{22} = -\frac{\Delta_{bb}^R}{\Delta^R}. \quad (5.6)$$

Оскільки решту параметрів ПЧ можна виразити через g -параметри, їх можна виразити через первинні R -параметри. Аналогічно можна виразити вторинні параметри ПЧ через первинні G -параметри (див. табл. 5.2).

Таблиця 5.2

$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,bb}^G} \begin{bmatrix} \Delta_{bb}^G & -\Delta_{ba}^G \\ \Delta_{ab}^G & -\Delta_{aa}^G \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta^R} \begin{bmatrix} \Delta_{aa}^R & -\Delta_{ba}^R \\ \Delta_{ab}^R & -\Delta_{bb}^R \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta^G} \begin{bmatrix} \Delta_{aa}^G & -\Delta_{ba}^G \\ \Delta_{ab}^G & -\Delta_{bb}^G \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,bb}^R} \begin{bmatrix} \Delta_{bb}^R & -\Delta_{ba}^R \\ \Delta_{ab}^R & -\Delta_{aa}^R \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,bb}^G} \begin{bmatrix} \Delta_{aa,bb}^G & -\Delta_{ba}^G \\ \Delta_{ab}^G & -\Delta^G \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}^R} \begin{bmatrix} \Delta^R & \Delta_{ba}^R \\ \Delta_{ab}^R & -\Delta_{aa,bb}^R \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}^G} \begin{bmatrix} \Delta_{aa}^G & \Delta_{aa,bb}^G \\ \Delta^G & \Delta_{bb}^G \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}^R} \begin{bmatrix} \Delta_{bb}^R & \Delta^R \\ \Delta^R & \Delta_{aa}^R \end{bmatrix}$

Приклад 5.2. Розрахувати g - та r -параметри чотириполосників (рис. 5.2).

Розв'язання. Складаємо для схеми, зображеної на рис. 5.2, a , систему контурних рівнянь

$$\begin{aligned} u_1 &= (R_1 + R_2)i_1 - R_2i_2, \\ -u_2 &= -R_2i_1 + (R_2 + R_3)i_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Порівнюючи ці рівняння з (5.2), знаходимо

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ R_2 & -(R_2 + R_3) \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Маючи r -параметри, за допомогою табл. 5.1 визначаємо g -параметри:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{bmatrix} (R_2 + R_3) & -R_2 \\ R_2 & -(R_1 + R_2) \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

До такого самого результату приводять і формули (5.6). Для схеми, зображеної на рис. 5.2, б, складаємо вузлові рівняння

$$\begin{aligned} i_1 &= (G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2, \\ -i_2 &= -G_2 U_1 + (G_2 + G_3)U_2. \end{aligned}$$

Як результат дуальності цих рівнянь та (5.6) маємо

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 \\ G_2 & -(G_2 + G_3) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3} \begin{bmatrix} (G_2 + G_3) & -G_2 \\ G_2 & -(G_1 + G_2) \end{bmatrix}.$$

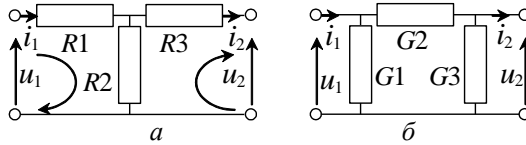


Рис. 5.2

Параметри ПЧ можна не тільки розраховувати, а й вимірювати, реалізуючи *режими короткого замикання та холостого ходу*. Наприклад, виміряємо у схемі (див. рис. 5.2) струми і напруги в режимі холостого ходу, тобто при $i_b = 0$, $u_b = u_x$. Підставивши ці значення (5.1), (5.3), (5.4), одержимо

$$r_{11} = \frac{u_a}{i_a}, \quad r_{21} = \frac{u_x}{i_a}; \quad f_{11} = \frac{i_a}{u_a}, \quad f_{21} = \frac{u_x}{u_a}; \quad a_{11} = \frac{u_a}{u_x}, \quad a_{21} = \frac{i_a}{u_x}.$$

Таким чином, доходимо висновку, що r_{11} — вхідний опір, r_{21} — передавальний опір, f_{11} — вхідна провідність, f_{21} — коефіцієнт передачі напруги, $a_{11}=1/f_{21}$, $a_{21}=1/r_{21}$ у режимі холостого ходу на виході ПЧ. Аналогічно можна виміряти й визначити фізичний смисл решти параметрів ПЧ, по черзі покладаючи, що $i_a = 0$, $u_b = 0$, $u_a = 0$.

Приклад 5.3. Розрахувати g - та r -параметри чотириполюсника (див. рис. 3.17, а) методом короткого замикання та холостого ходу.

Розв'язання. Покладаючи у рівняннях (5.1) $a=1, b=2, u_2=0, i_2=i_{2к}$, знаходимо $g_{11}=i_1/u_1$, $g_{21}=i_{2к}/u_1$. Закоротивши вихід у схемі, знаходимо струми:

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)u_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad i_{2к} = \frac{R_2 u_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

звідки одержуємо значення параметрів g_{11} , g_{21} , що збігаються в (5.9). Покладаючи тепер $u_1=0, i_1=i_{1к}$ у (5.1), знаходимо $g_{12}=i_{1к}/u_2$, $g_{22}=i_2/u_2$. Закоротивши вхід у схемі (див. рис. 5.2, а), одержуємо

$$i_2 = -\frac{(R_1 + R_2)u_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}, \quad i_{1к} = -\frac{R_2 u_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3},$$

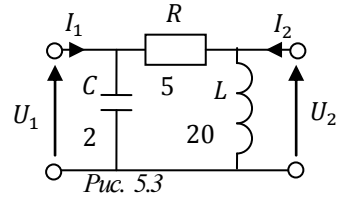
звідки знаходимо значення параметрів g_{21}, g_{22} . R -параметри визначаємо аналогічно, покладаючи в (5.2) $i_2=0$, а потім $i_1=0$, й аналізуючи схему в режимах холостого ходу на вході та виході.

Приклад 5.4. У підсилювачі виміряли в режимі холостого ходу ($i_b=0$): $u_{a.x}=100$ мВ, $u_{e.x}=10$ В, $i_{a.x}=10$ мкА; а також в режимі короткого замикання ($u_b=0$): $u_{a.к}=100$ мВ, $i_{a.к}=15$ мкА, $i_{e.к}=10$ мА. Визначити a -параметри.

Розв'язання. Виходячи з рівнянь (5.5), знаходимо:

$$a_{11} = u_{a.x}/u_{e.x} = 10^{-2}, \quad a_{12} = u_{a.x}/i_{e.к} = 10 \text{ Ом}, \\ a_{21} = i_{a.x}/u_{e.x} = 10^{-6} \text{ См}, \quad a_{22} = i_{a.x}/i_{e.к} = 1,5 \cdot 10^{-2}.$$

Приклад 5.5. У колі (рис. 5.3) знайти h – параметри чотириполосника на частоті $\omega = 10^6$ рад/с. Результати представити у показниковій формі. Числові значення елементів кола: опори в кОм, ємності в нФ, індуктивності в мГн.



Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях індуктивність – мГн, ємність – нФ, опір – кОм, провідність – мСім, частота – рад/мкс.

Системи рівнянь чотириполосника для h – параметрів

$$\begin{cases} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2; \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2. \end{cases}$$

Комплексні опори реактивних елементів

$$Z_L = j\omega L = 0.1 \cdot 20 \cdot j = 2j;$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 0.1 \cdot 2} = -5j.$$

За формулою дільника струму (рис. 5.4 а)

$$I_2 = -\frac{I_1 \cdot Z_C}{R + Z_C}.$$

За формулою дільника напруги та вхідний опір (рис. 5.4 б)

$$U_2 = \frac{U_1 \cdot Z_L}{R + Z_L}; \quad Z_{\text{вих}} = \frac{Z_L(Z_C + R)}{Z_L + Z_C + R}.$$

Фізичний зміст

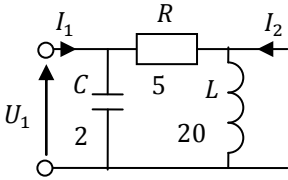
$$h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = Z_{\text{вх}} = \frac{R \cdot Z_C}{R + Z_C} = \frac{5 \cdot (-5j)}{5 - 5j} = 2.5 - 2.5j = 2.5\sqrt{2}e^{-j45^\circ};$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} = K_I = -\frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{5j}{5 - 5j} = -0.5 + 0.5j = 0.5\sqrt{2}e^{j135^\circ};$$

$$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{K_U} = \frac{R + Z_L}{Z_L} = \frac{5 + 2j}{2j} = 1 - 2.5j = 2.7e^{-j68.2^\circ};$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} = Y_{\text{вих}} = \frac{Z_L + Z_C + R}{Z_L(R + Z_C)} = \frac{2j - 5j + 5}{2j(5 - 5j)} = 0.1 - 0.4j = 0.4e^{-j76^\circ}.$$

а)



б)

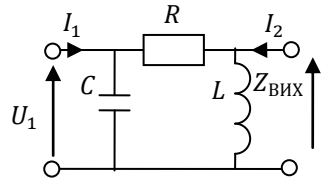


Рис. 5.4

Відповідь: $h_{11} = 2.5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}$; $h_{12} = 2.7e^{-j68.2^\circ}$; $h_{21} = 0.5\sqrt{2}e^{j135^\circ}$,
 $h_{22} = 0.4e^{-j76^\circ}$.

5.2. Схемні функції чотириполіусників

Маючи параметри ПЧ, можна знаходити будь-які схемні функції. Нехай дано g -параметри. Складаємо систему рівнянь:

$$i_a = g_{11}u_a + g_{12}u_b, i_b = g_{21}u_a + g_{22}u_b, i_b = G_{\text{н}}u_b.$$

Одну зі змінних i_a або u_a вважаємо заданою дією. Тоді за допомогою цих рівнянь можна виразити інші три змінні через змінну дії та знайти відповідні схемні функції. Так, із другого та третього рівнянь випливає:

$$G_{\text{н}}U_b = g_{21}U_a + g_{22}U_b. \text{ Звідки } K_U = \frac{U_b}{U_a} = \frac{g_{21}}{G_{\text{н}} - g_{22}}. \text{ Аналогічно відшуковують й інші схемні функції, що наведені у табл. 5.3.}$$

Приклад 5.6. Розрахувати вхідний опір, коефіцієнта передачі напруги, струму та потужності підсилювача, a -параметри якого були визначені у прикладі 5.4. Опір навантаження $R_{\text{н}} = 1,0 \text{ кОм}$.

Розв'язання. Складаємо систему рівнянь

$$u_a = a_{11}u_b + a_{11}i_b, i_a = a_{21}u_b + a_{22}i_b, u_b = R_{\text{н}}i_b,$$

з якої знаходимо:

$$R_{\text{вх}} = \frac{u_a}{i_a} = \frac{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}} = 8 \text{ кОм}, \quad K_U = \frac{u_b}{u_a} = \frac{R_{\text{н}}}{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}} = 50,$$

$$K_i = \frac{i_b}{i_a} = \frac{1}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}} = 400, \quad K_p = K_U K_i = 2 \cdot 10^4.$$

Таблиця 5.3

$R_{\text{вх}}$	$\frac{G_{\text{н}} - g_{22}}{g_{11}G_{\text{н}} - g }$	$r_{11} + \frac{r_{12}r_{21}}{R_{\text{н}} - r_{22}}$	$h_{11} + \frac{h_{12}h_{21}}{G_{\text{н}} - h_{22}}$	$\frac{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}}$
K_U	$\frac{g_{21}}{G_{\text{н}} - g_{22}}$	$\frac{R_{\text{н}}r_{21}}{r_{11}R_{\text{н}} - r }$	$\frac{h_{21}}{h_{11}G_{\text{н}} - h }$	$\frac{R_{\text{н}}}{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}}$
K_i	$\frac{G_{\text{н}}g_{21}}{g_{11}G_{\text{н}} - g }$	$\frac{r_{21}}{R_{\text{н}} - r_{22}}$	$\frac{h_{21}G_{\text{н}}}{G_{\text{н}} - h_{22}}$	$\frac{1}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}}$
$G_{\text{пер}}$	$\frac{g_{21}G_{\text{н}}}{G_{\text{н}} - g_{22}}$	$\frac{r_{21}}{r_{11}R_{\text{н}} - r }$	$\frac{G_{\text{н}}h_{21}}{h_{11}G_{\text{н}} - h }$	$\frac{1}{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}}$
$R_{\text{пер}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}G_{\text{н}} - g }$	$\frac{r_{21}R_{\text{н}}}{R_{\text{н}} - r_{22}}$	$\frac{h_{21}}{G_{\text{н}} - h_{22}}$	$\frac{R_{\text{н}}}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}}$
$ g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}, \quad r = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21}, \quad h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$				

Приклад 5.6. Розрахувати вхідний опір, коефіцієнта передачі напруги, струму та потужності підсилювача, a -параметри якого були визначені у прикладі 5.4. Опір навантаження $R_{\text{н}} = 1,0$ кОм.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь

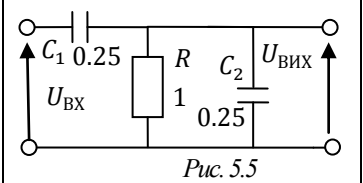
$$u_a = a_{11}u_b + a_{11}i_b, i_a = a_{21}u_b + a_{22}i_b, u_b = R_{\text{н}}i_b,$$

з якої знаходимо:

$$R_{\text{вх}} = \frac{u_a}{i_a} = \frac{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}} = 8 \text{ кОм}, \quad K_U = \frac{u_b}{u_a} = \frac{R_{\text{н}}}{a_{11}R_{\text{н}} + a_{12}} = 50,$$

$$K_i = \frac{i_b}{i_a} = \frac{1}{a_{21}R_{\text{н}} + a_{22}} = 400, \quad K_p = K_U K_i = 2 \cdot 10^4.$$

Приклад 5.7. У колі (рис. 5.5) знайти вираз коефіцієнта передачі за напругою. Побудувати АЧХ та ФЧХ коефіцієнта передачі за напругою. На графіку зазначити асимптоти та побудувати початкові значення. Числові значення елементів наведені на схемі: опори – кОм, ємності – нФ.



Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: опір – кОм, провідність – мСім, індуктивність – мГн, ємність – нФ.

Матриця провідностей кола (рис. 5.5)

$$Y = \begin{bmatrix} pC_1 & -pC_1 \\ -pC_1 & pC_1 + pC_2 + g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25p & -0.25p \\ -0.25p & 0.5p + 1 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U(p) = \frac{U_{ВИХ}}{U_{ВХ}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-0.25p)}{(-1)^{1+1}(0.5p + 1)} = \frac{0.25p}{1 + 0.5p}.$$

Коефіцієнт передачі від частоти

$$K_U(\omega) = \frac{0.5j\omega}{2 + j\omega} = \frac{0.5\omega e^{j90^\circ}}{\sqrt{4 + \omega^2} e^{j \arctg(0.5\omega)}} = \frac{0.5\omega}{\sqrt{4 + \omega^2}} e^{j[90^\circ - \arctg(0.5\omega)]}.$$

Вирази АЧХ та ФЧХ коефіцієнта передачі за напругою

$$|K_U(\omega)| = \frac{0.5\omega}{\sqrt{4 + \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg(0.5\omega).$$

Побудуємо графіки АЧХ та ФЧХ коефіцієнта передачі (рис. 5.6).

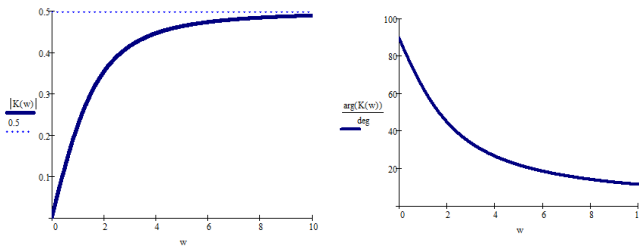


Рис. 5.6

Відповідь: $K_I(\omega) = 0.5j\omega / (2 + j\omega)$.

5.3. Схеми з'єднань чотириполусників

Чотириполусники можуть з'єднуватися між собою, утворюючи *складені ПЧ*. Різні схеми з'єднання ПЧ, показані на рис. 5.7, називаються: а) *каскадне*, б) *послідовне*, в) *паралельне*, г) *послідовно-паралельне*, д) *паралельно-послідовне*.

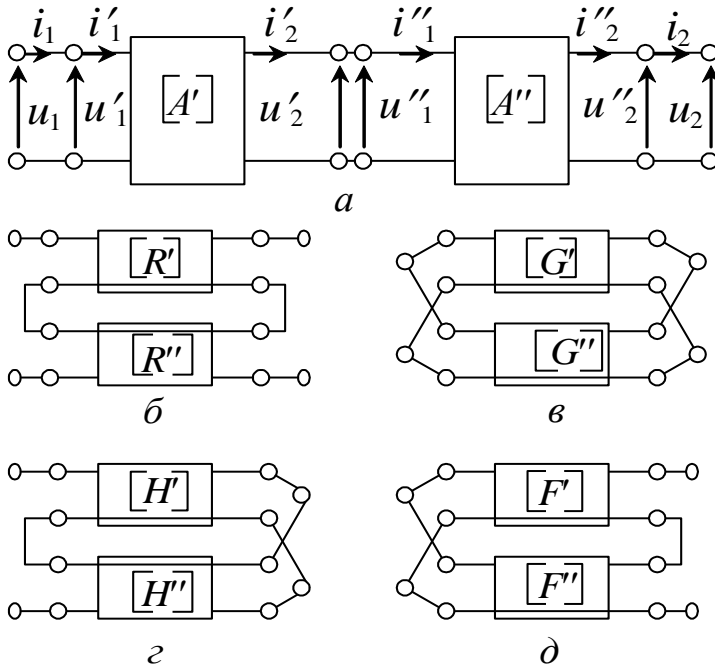


Рис. 5.7

Параметри складених ПЧ можна виразити через параметри складових ПЧ. Запишемо рівняння (5.5) складових ПЧ (рис. 5.7, а) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ i'_1 \end{bmatrix} = [A'] \times \begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u''_1 \\ i''_1 \end{bmatrix} = [A''] \times \begin{bmatrix} u''_2 \\ i''_2 \end{bmatrix}.$$

Крім того, враховуємо, що

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1' \\ i_1' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1'' \\ i_1'' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2'' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Із цього випливає

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [A'] \times [A''] \times \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = [A] \times \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix},$$

тобто матриця a -параметрів каскадного з'єднання ПЧ дорівнює добутку матриць складових ПЧ, а саме:

$$[A] = [A'] \times [A'']. \quad (5.11)$$

Аналогічно знаходяться формули для інших видів з'єднань:

$$\text{послідовного} \quad [R] = [R'] + [R'']; \quad (5.12)$$

$$\text{паралельного} \quad [G] = [G'] + [G'']; \quad (5.13)$$

$$\text{послідовно-паралельного} \quad [H] = [H'] + [H'']; \quad (5.14)$$

$$\text{паралельно-послідовного} \quad [F] = [F'] + [F'']. \quad (5.15)$$

Формули (5.12)–(5.15) одержано за умови, що струми попарно рівні між собою у вхідних та вихідних полюсах кожного складового ПЧ. Це називається *умовою регулярності* з'єднань ПЧ. Каскадне з'єднання регулярне завжди. Можна показати, що решта з'єднань регулярні у випадках, показаних на рис. 5.7, тобто коли складові ПЧ мають замкнені сторони, які перемикаються поміж собою при з'єднанні.

Приклад 5.8. Два підсилювачі ввімкнено каскадно і навантажено на опір $R_n = 1$ кОм. Кожен із підсилювачів має a -параметри, розраховані в прикладі 5.6. Знайти вхідний опір, а також коефіцієнти передачі напруги, струму і потужності двокаскадного підсилювача.

Розв'язання. За формулою (5.11) розраховуємо a -параметри каскадного з'єднання:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a''_{21} & a''_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}) & (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}) \\ (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}) & (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22}) \end{bmatrix}.$$

Підставляючи числові дані і скориставшись виразами, одержаними у прикл. 5.5, знаходимо

$$R_{\text{вх}} = 9,5 \text{ кОм}, K_U = 8 \cdot 10^3, K_i = 7,3 \cdot 10^4, K_p = 5,8 \cdot 10^8.$$

5.4. Умови оберненості та симетрії чотириполосників

Означимо поняття *оберненості*. Розглянемо схему (рис. 5.8, а), в якій виділена вітка з єдиним джерелом E та деяка вітка зі струмом i_a , викликаним дією цього джерела. Потім перенесемо джерело E в другу вітку (рис. 5.8, б) і знайдемо струм i_b у першій вітці. Якщо виявиться, що $i_b = i_a$, то кажуть, що схема обернена. Нехай перша вітка перебуває в b -му контурі, а друга — в a -му. Складемо систему контурних рівнянь у схемі (рис. 5.8 а) і знайдемо з неї струм $i_a = E \Delta_{ab}^R / \Delta^R$. Аналогічно для схеми (рис. 5.8, б) маємо $i_b = E \Delta_{ba}^R / \Delta^R$. При $i_b = i_a$ одержуємо $\Delta_{ab}^R = \Delta_{ba}^R$, тобто матриця опорів схеми симетрична. Отже, обернена схема має симетричну матрицю параметрів. Можна показати, що схеми, складені з двополосних елементів, є оберненими. Необерненими є схеми, що містять багатополосні активні елементи.

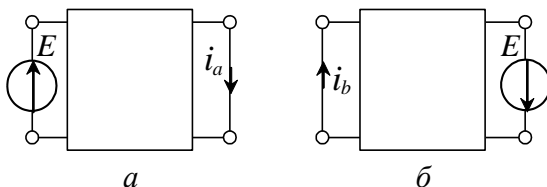


Рис. 5.8

Представляючи як завгодно складну схему чотириполосником, її можна описати згідно з (5.1)–(5.6) лише чотирма параметрами. Більш того, за певних умов цих параметрів може бути менше. Нехай ПЧ є оберненим. Тоді в (5.2) $\Delta_{12}^R = \Delta_{21}^R$, отже $g_{12} = -g_{21}$. Виражаючи інші параметри чотириполосника через g -параметри, можна одержати такі *умови оберненості* ПЧ:

$$g_{12} = -g_{21}, \quad r_{12} = -r_{21}, \quad h_{12} = h_{21}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \quad (5.16)$$

Таким чином, обернений ПЧ має три незалежні параметри, а четвертий — можна визначити з (5.16).

Симетричним називається чотириполосник, у якого при заміні місцями входу та виходу режим на вході та виході не змінюється. Доводиться, що у симетричних ПЧ, крім (3.45), мають місце такі співвідношення:

$$g_{11} = -g_{22}, \quad r_{11} = -r_{22}, \quad a_{11} = a_{22}, \quad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = -1, \quad (5.17)$$

що виражають умови симетрії. Отже, симетричний ПЧ описується лише двома параметрами, а решту можна визначити за формулами (5.16) і (5.17).

5.5. Еквівалентність і схеми заміщення чотириполосників

Умовою еквівалентності двох ПЧ є, очевидно, рівність усіх відповідних параметрів. Поставимо питання: яка найпростіша еквівалентна схема довільного ПЧ? Почнемо розгляд в обернених ПЧ. Як було показано, вони мають три незалежні параметри. Тому найпростіша еквівалентна схема повинна мати не менше трьох елементів. Таких схем може бути дві: П-подібна («трикутник») (див. рис. 5.2, б) і Т-подібна («зірка») (див. рис. 5.2, а). Для схеми, зображеної на (див. рис. 5.2, а), згідно з (5.12) маємо

$$r_{11} = R_1 + R_2, \quad r_{12} = -R_2, \quad r_{21} = R_2, \quad r_{22} = -(R_2 + R_3).$$

Звідси знаходимо:

$$R_1 = r_{11} + r_{12}, \quad R_2 = -r_{12}, \quad R_3 = r_{12} - r_{22}. \quad (5.18)$$

Таким чином, параметри Т-схеми можна однозначно виразити через параметри довільного ПЧ, отже, така схема є його еквівалентною схемою. Зауважимо, що при $R_1 = R_3$ маємо $r_{11} = -r_{22}$, що є умовою симетрії ПЧ. Аналогічно виводяться дуальні формули для П-подібної еквівалентної схеми:

$$G_1 = g_{11} + g_{12}, \quad G_2 = -g_{12}, \quad G_3 = g_{12} - g_{22}. \quad (5.19)$$

Перейдемо тепер до розгляду необернених ПЧ, що мають чотири незалежні параметри, тож їх еквівалентні схеми повинні мати чотири елементи. При цьому хоча б один з них має бути необерненим, наприклад, керованим джерелом. Існує багато схем заміщення необернених ПЧ, методів їх побудови. Розглянемо деякі з них. Запишемо систему рівнянь (5.11) у вигляді

$$i_a = g_{11}u_a + g_{12}u_b, \quad i_b = -g_{12}u_a + g_{22}u_b + (g_{12} + g_{21})u_a.$$

При виконанні умов оберненості останній доданок другого рівняння дорівнює нулю, і ПЧ може бути представленим еквівалентною схемою (див. рис. 5.2, б) з параметрами, що визначаються формулами (3.48). У необерненого ПЧ цей доданок не дорівнює нулю. Оскільки він є частиною струму i_b і залежить від напруги u_a , його можна змоделювати залежним джерелом струму з параметром $\sigma = g_{12} + g_{21}$, як показано на рис. 5.9, а. Дуальну схему необерненого ПЧ одержимо з рівнянь (5.2). Вона зображена на рис. 5.9, б, причому параметр залежного джерела $\rho = r_{12} + r_{21}$.

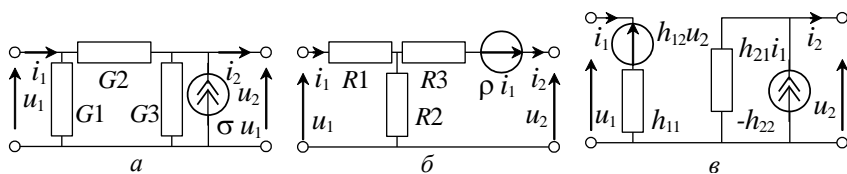


Рис. 5.9

Розглянемо ще один метод побудови еквівалентних схем ПЧ на прикладі рівнянь з h -параметрами (5.3). Відповідна їм схема показана на рис. 5.9, в, з якої видно, що перше рівняння є контурним рівнянням входу схеми, а друге – це рівняння виходу схеми. Аналогічні еквівалентні схеми можна одержати, виходячи з інших систем рівнянь.

КМ 3.15. Виконати завдання 5 з підрозділу 3.5.4.

5.6. Комп'ютерне моделювання

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- параметрів прохідних чотириполюсників;
- з'єднань чотириполюсників;
- схем заміщення прохідних чотириполюсників.

1. Встановити параметри елементів вихідної схеми, зображеної на рис. 5.10, згідно з одним із варіантів табл. 5.4. У цій схемі опори R_1, R_2, R_3, R_4 утворюють прохідний чотириполюсник із входом, утвореним вузлами a, c , і виходом, утвореним вузлами b, d . Розрахувати g -параметри, виразивши їх через первинні R -параметри за формулами табл. 5.2, маючи матрицю опорів

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 \end{bmatrix}.$$

2. Виміряти g -параметри. Для цього перемикачами S_1 і S_2 підключити до входу джерело напруги E_1 і перемикачами S_3 і S_4 замкнути вихід ($u_b = 0$). Покладаючи $u_b = 0$ в (5.1), знаходимо

$$g_{11} = \frac{i_a}{u_a}, \quad g_{21} = \frac{i_{bk}}{u_a}.$$

Таблиця 5.4

Номер варіанта	E1, В	E2, В	R1, кОм	R2, кОм	R3, кОм	R4, кОм	R5, кОм
1	5	10	2	2	1	1	1
2	5	10	1	1	1	2	2
3	10	5	2	1	1	2	2
4	10	5	2	2	2	4	4
5	15	10	3	3	2	4	4
6	15	10	2	2	3	3	3
7	20	15	3	3	4	4	4
8	20	15	3	3	3	5	5

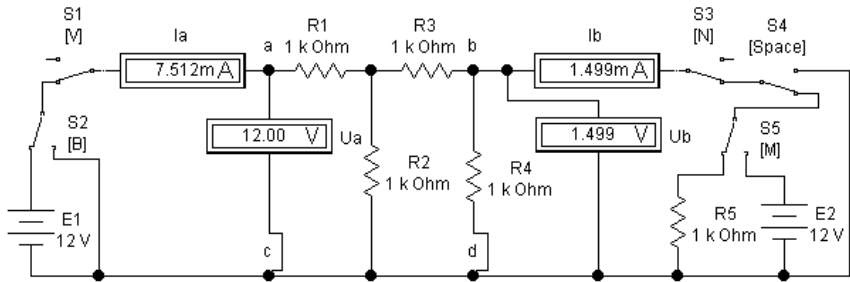


Рис. 5.10

Отже, для визначення цих параметрів слід виміряти вхідні струм і напругу i_a, u_a , а також вихідний струм короткого замикання i_{bk} . Решту g -параметрів можна виміряти в режимі короткого замикання входу. Для цього потрібно перемикачами S1 і S2 закоротити вхід і за допомогою перемикачів S3, S4 і S5 підключити до виходу джерело напруги E2. Покладаючи $u_a = 0$ в (5.1), знаходимо аналогічно

$$g_{12} = \frac{i_{ak}}{u_b}, \quad g_{21} = \frac{i_b}{u_b}.$$

Порівняти виміряні параметри чотириполусника з розрахованими у п. 1.

3. Перерахувати визначені вище g -параметри в r -параметри за формулами табл. 5.2. Виміряти r -параметри у схемі, зображеній на рис. 5.10. Для цього реалізувати режим холостого ходу на виході, розімкнувши перемикач S3. Підставивши в (5.2) $i_b = 0$, знаходимо

$$r_{11} = \frac{u_a}{i_a}, \quad r_{21} = \frac{u_{bx}}{i_a}.$$

Для визначення цих параметрів слід виміряти вхідні струм і напругу i_a, u_a , а також вихідну напругу холостого ходу u_{bx} . Решту r -параметрів можна виміряти в режимі холостого ходу на вході, а саме за умови $i_a = 0$ знаходимо із формул (5.2)

$$r_{12} = \frac{u_{ax}}{i_b}, \quad r_{21} = \frac{u_b}{i_b}.$$

Для цього потрібно розімкнути вхід перемикачем S1, а до виходу підключити джерело E2 перемикачами S3, S4 і S5 і виміряти вихідні струм і напругу i_b, u_b , а також вхідну напругу холостого ходу u_{xx} . Порівняти розраховані і виміряні величини r -параметрів.

4. Виміряти вхідний опір $R_{вх} = u_a / i_a$, коефіцієнт передачі напруги $K_U = u_b / u_a$, коефіцієнт передачі струму $K_i = i_b / i_a$, передаточну провідність $G_{пер} = i_b / u_a$ і передаточний опір $R_{пер} = u_b / i_a$ прохідного чотириполосника (див. рис. 5.10). Для цього до входу чотириполосника підключити джерело напруги E1 перемикачами S1 і S2, а до виходу підключити опір навантаження R_5 перемикачами S3, S4 і S5, після чого виміряти вхідні і вихідні струми і напруги. За результатами вимірів розрахувати схемні функції. Розрахувати також схемні функції за формулами табл. 5.3, виразивши їх через g - і r -параметри.

5. Розрахувати за формулами (5.18) і (5.19) параметри Т-подібної (зірка) (рис. 5.11) і П-подібної (трикутник) (рис. 5.12) еквівалентних схем чотириполосника (див. рис. 5.10). Виміряти g - і r -параметри еквівалентних схем, як у п. 2, 3, а також схемні функції, як у п. 4. Довести еквівалентність цих схем, порівнявши параметри і схемні функції еквівалентних схем і вихідної схеми.

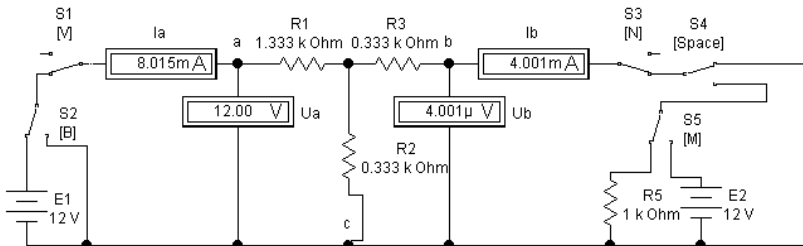


Рис. 5.11

6. Скласти схему з паралельним з'єднанням чотириполіусників (див. рис. 5.11 і 5.12), утворивши складений чотириполіусник (див. рис. 5.12). Розрахувати його g -параметри за формулами (5.13). Виміряти g -параметри складеного чотириполіусника за методикою, наведеного у п. 2. Порівняти розраховані і виміряні g -параметри.

5.7. Підсумки і самоконтроль

Основним результатом вивчення даного розділу має бути засвоєння методів складання та розв'язання рівнянь лінійних кіл — таких, як прохідного чотириполіусника. Новими важливими поняттями, введенними у цій главі, є схемна функція, прохідний чотириполіусник.

Доповнити знання з тематики глави можливо за такими джерелами [2, гл. 3], [3, гл. 3], [6, гл. 2, 3, 4], [10, гл. 2, 3, 8, 10], [11, гл. 3], [12, гл. 3].

Для закріплення знань наводимо такі контрольні питання та завдання.

- Які кола розглядаються як прохідні чотириполіусники?
- Якими рівняннями та параметрами описуються прохідні чотириполіусники?
- Як параметри чотириполіусника пов'язані між собою і з первинними параметрами схеми?
- Як виміряти параметри чотириполіусника і який їх фізичний смисл?
- Як схемні функції виражаються через параметри чотириполіусника?
- Які Ви знаєте схеми з'єднань чотириполіусників і як визначаються параметри складових чотириполіусників?
- Які найпростіші еквівалентні схеми мають обернені та необернені чотириполіусники?

РОЗДІЛ 6. ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ

6.1. Закони комутації

Схеми заміщення з реактивними елементами описуються диференціальними рівняннями, для розв'язання яких потрібно мати початкові умови. Ці умови знаходяться за допомогою законів неперервності, до розгляду яких ми переходимо. Помноживши обидві частини рівняння (1.11) на C і враховуючи

(1.9), одержимо $q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t i(x)dx$. Нехай $t = \Delta t, t_0 = -\Delta t, \Delta t \rightarrow 0$. Якщо

$i(t)$ не сягає в нескінченність, то

$$q_C(+0) = q_C(-0), \quad (6.1)$$

тобто заряд в ємності змінюється у часі безперервно, якщо струм не має нескінченного значення. З (6.1) випливає

$$C(+0) \cdot U_C(+0) = C(-0) \cdot U_C(-0).$$

Таким чином, якщо $C(+0) = C(-0)$, то одержимо *закон комутації напруги на ємності*

$$U_C(+0) = U_C(-0). \quad (6.2)$$

Напруга на ємності змінюється безперервно за умови, що ємність не змінюється стрибкоподібно і струм не має нескінченної величини.

Помноживши обидві частини (1.16) на L , одержимо

$\Psi(t) = \Psi(t_0) + \int_{t_0}^t u(x)dx$, звідки виводимо якщо $u(t)$ не сягає в нескінченність, то

$$\psi_L(+0) = \psi_L(-0), \quad (6.3)$$

тобто потокозчеплення в індуктивності змінюється у часі безперервно, якщо напруга не має нескінченного значення. З (6.3) випливає

$$L(+0) \cdot i_L(+0) = L(-0) \cdot i_L(-0).$$

Таким чином, якщо $L(+0) = L(-0)$, то одержимо *закон комутації струму в індуктивності*

$$i_L(+0) = i_L(-0). \quad (6.4)$$

Струм в індуктивності змінюється безперервно, якщо величина індуктивності не змінюється стрибком і напруга не стає нескінченною.

Закони комутації можна пояснити з позицій енергетики електромагнітних процесів. Якщо напруга на ємності зміниться стрибком, то згідно з (1.12) стрибком зміниться енергія, а це потребує нескінченної потужності. Тому при скінченному значенні напруги струм повинен стати нескінченним. Аналогічні міркування можна навести відносно формули (1.17).

Приклад 6.1. У схемі (рис. 6.1) паралельно резистору R_2 під час роботи може вмикатися незаряджений конденсатор C . На який струм треба розраховувати доріжки друкованої плати, на якій розміщено резистори R_1 , R_2 і конденсатор C ? Дано: $U = 100$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 10$ кОм.

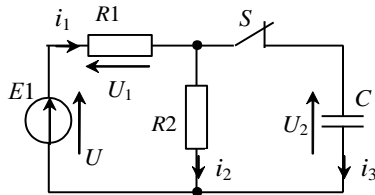


Рис. 6.1

Розв'язання. До вмикання конденсатора струм у резисторах $i_1 = i_2 = U/(R_1 + R_2) = 10$ мА. У момент вмикання конденсатора $U_2 = 0$ згідно із законом неперервності. Оскільки за ЗКН $U - U_1 - U_2 = 0$, то $U_1 = U$, і за законом Ома $i_2 = U_2/R_2 = 0$, $i_1 = U_1/R_1 = 1$ А. За ЗКС $i_1 - i_2 - i_3 = 0$, звідки $i_3 = i_1 = 1$ А. Коли завершиться заряд конденсатора, струм у ньому $i_3 = 0$, і в резисторах встановиться початкове значення струму. Отже, екстремальний струм в 1 А протікає в момент вмикання конденсатора по колу: джерело — резистор R_1 — конденсатор C — джерело, а струм у R_2 не перевищує 10 мА.

КМ 6.1: виконати п. 4 підрозділу 2.6.2.

Приклад 6.2. У процесі роботи схеми (рис. 6.2) може розмикатися ключ S . До розмикання у схемі протікав сталий струм. На які напруги слід розраховувати доріжки друкованої плати, на якій розміщено резистори і котушка? Дано: $U = 10$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 100$ кОм.

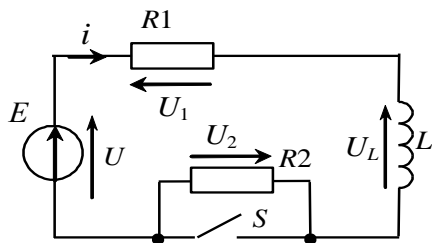


Рис. 6.2

Розв'язання. До комутації $U_2 = 0$ (ключ замкнений) і $U_L = 0$ (сталий струм). Отже, $U_1 = U = 10 \text{ В}$, $i = U_1 / R_1 = 10 \text{ мА}$. У початковий момент згідно з законом неперервності $i = 10 \text{ мА}$. Тоді $U_1 = R_1 i = 10 \text{ В}$, $U_2 = R_2 i = 1000 \text{ В}$. За ЗКН $U_L = U - U_1 - U_2 = -1000 \text{ В}$.

Розглянуті приклади показують, що комутації в ЕМК можуть супроводитися значними стрибками струмів і напруг, що необхідно враховувати при розробленні апаратури.

КМ 6.2. Виконати п. 5 з підрозділу 2.6.2.

6.2. Схеми заміщення та рівняння лінійних інерційних кіл

Інерційні кола відрізняються від неінерційних тим, що вони спроможні накопичувати енергію. Процеси в таких колах визначаються не лише дією джерел, а й накопиченою енергією. Тому розрізняють *вільні процеси* (режим *вільних коливань*) та *примушені процеси* (режим *примушених коливань*). Перші зумовлені початковим запасом енергій у колі, другі — дією джерел. Якщо в колі діє джерело постійної або періодичної дії, то в колі встановлюється режим постійних або періодичних струмів і напруг. Такі режими називають *усталеними*. Якщо в усталеному режимі в колі робляться які-небудь перемикання (комутації), то коло переходить у новий усталений режим не відразу внаслідок інерційності, а через деякий час. Такий процес називають *перехідним*.

Оскільки в інерційних колах не можна нехтувати енергією в електричних і магнітних полях, такі кола моделюються схемами, що містять реактивні елементи — ємності й індуктивності.

Повну систему рівнянь інерційного кола, як і неінерційного, складають за законами Кірхгофа та елементними рівняннями. Відмінність поля-

гає лише в тому, що елементні рівняння реактивних елементів містять операції диференціювання й інтегрування. Тому інерційні кола описуються *інтегро-диференціальними рівняннями*, які можна звести до диференціальних рівнянь. Тоді будь-яка змінна інерційного кола визначається як розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = y(t). \quad (6.5)$$

Розв'язок такого рівняння знаходять як суму $x = x_{\text{в}} + x_{\text{п}}$ загального розв'язку однорідного рівняння $x_{\text{в}}$, що називається вільною складовою, та частинного розв'язку неоднорідного рівняння $x_{\text{п}}$, яке називається примушеною складовою. Причому

$$x_{\text{в}} = \sum_{k=1}^n A_k \exp(p_k t), \quad (6.6)$$

де A_k — сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов, а P_k — корені характеристичного рівняння $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$. Примушена складова визначається видом функції $y(t)$. Зокрема, якщо $y(t)$ є поліномом, гармонічною або експоненціальною функцією, то й $x_{\text{п}}(t)$ шукається у вигляді такої самої функції. Для цього $x_{\text{п}}(t)$ треба підставити в (4.1) і дібрати параметри з тим, щоб одержати тотожність.

Для визначення коефіцієнтів A_k необхідно задати початкові умови: значення функції $x(0)$ та її похідних $x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ в початковий момент $t = 0$. Початкові величини струмів в індуктивностях і напруг на ємностях знаходять за допомогою законів неперервності. Їх називають *незалежними початковими умовами*. Решту струмів, напруг та їх похідних, що утворюють *залежні початкові умови*, знаходять за допомогою законів Кірхгофа та елементних рівнянь.

Енергетичний стан кола, а отже, й характер процесів визначаються напругами ємностей та струмами індуктивностей, які називають *змінними стану*. Через них можна виразити інші струми та напруги кола. Тому диференціальні рівняння електричних кіл бажано складати відносно змінних стану, як це показано далі на прикладах.

6.3. Вільні, примушені та перехідні процеси в електричних колах

Методика аналізу процесів в електричних колах проілюстрована в подальших прикладах.

Приклад 6.3. Проаналізувати схему, зображену на рис. 6.3, після перемикавання ключа S із положення 1 в положення 2. До перемикавання у схемі був усталений режим постійних струмів.

Розв'язання. Після перемикавання утворюється схема, в якій не діють джерела, але є початковий запас енергії, одержаний від джерела до перемикавання. Таким чином, у схемі відбуватимуться вільні коливання.

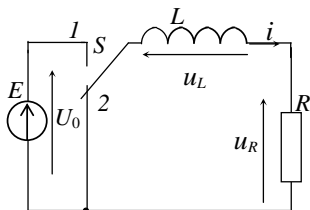


Рис. 6.3

Складемо повну систему рівнянь: $u_L + u_R = 0$, $u_L = L \frac{di}{dt}$, $u_R = Ri$. Зводимо цю систему до диференціального рівняння відносно струму, який є змінною стану:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (6.7)$$

Його розв'язок

$$i_b = A_1 e^{p_1 t}, \quad (6.8)$$

де p_1 — корінь характеристичного рівняння $Lp + R = 0$, а саме

$$p_1 = -R/L = -1/\tau_L.$$

Величина

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

називається *сталюю часу* RL -кола. Для знаходження сталої інтегрування A_1 потрібно знати початкові умови $i_B(0)$ при $t = 0$. Величину $i_B(0)$ можна знайти, розглядаючи режим схеми до комутації.

Якщо схема була в усталеному режимі, тобто в режимі постійного струму, то $u_L = 0$, $i = U_0/R$. Згідно із законом неперервності, початкове значення струму після комутації дорівнює його величині до комутації, а саме $i_B(0) = U_0/R$. Підставивши в (4.4) $t = 0$, $i_B(0) = U_0/R$, одержимо $A_1 = U_0/R$.

Тоді $i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$, $t \geq 0$. Маючи струм, знаходимо решту змінних:

$u_R = Ri_B = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$, $u_L = L \frac{di_B}{dt} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$. Часові діаграми знайдених змінних показано на рис. 6.4.

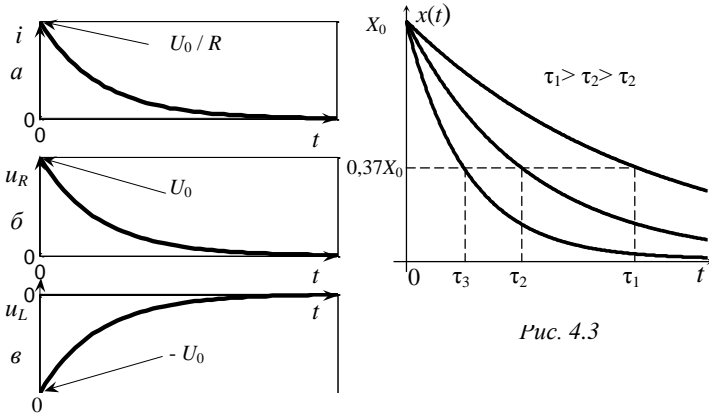


Рис. 6.4

Пояснимо фізичний смисл процесів у схемі. Зіставивши знак мінус зі стрілкою на схемі, бачимо, що напрямки струму та напруги в індуктивності збігаються так, як у джерелах. Отже, в режимі вільних коливань індуктивність віддає накопичену в магнітному полі енергію. Знайдемо енергію, що одержує опір:

$$W_R = \int_0^{\infty} u_R \cdot i_B dt = \int_0^{\infty} \frac{U^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau_L}} dt = \frac{Li_B^2(0)}{2}.$$

Отже, вся енергія, накопичена в індуктивності, повністю витрачається в опорі, тому струм із часом зменшується до нуля. Інтенсивність вільного процесу визначається нагромадженою енергією, а швидкість протікання – сталою часу. Чим більше τ_L , тим повільніше затухають коливання. Домовились тривалістю вільного процесу вважати час $T = 3\tau_L$, за який змінні зменшуються до $e^{-3} \approx 0,05$ від початкової величини. Сталу часу можна визначити за осцилограмою. Так при $t_1 = \tau_L$ маємо $x(t_1) = x(0)e^{-1} \approx 0,37x(0)$, тобто τ_L дорівнює часу, за який змінна зменшується до 0,37 від початкового значення (див. рис. 4.3).

КМ 6.3. Виконати завдання 1 з підрозділу 6.3.1.

Приклад 6.4. Проаналізувати схему (рис. 6.5) після перемикавання ключа в положення 2 за умови, що ємність була заряджена до напруги U_0 .

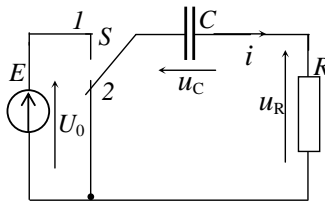


Рис. 6.5

Розв'язання. Процес є вільним, оскільки зумовлений накопиченою в ємності енергією. Складаємо повну систему рівнянь:

$$u_C + u_R = 0, \quad u_R = Ri, \quad i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (6.9)$$

Тут змінною стану є напруга u_C . Виключаючи з (6.9) i та u_R , одержимо рівняння

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

розв'язок якого знаходимо як і в попередньому прикладі. Так, за початкових умов $t = 0$, $u_C = U_0$ одержимо $u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}}$, $t \geq 0$, де $\tau_c = RC$ – стала часу RC -кола. Маючи u_C , знаходимо решту змінних, осцилограми яких наведено на рис. 6.6, а саме:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_C}}, \quad u_R = -u_C = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau_C}}.$$

Фізичний смисл процесу в цьому прикладі такий самий, як і в попередньому: ємність є джерелом енергії, яка розсіюється в опорі. Сталу часу τ_C також можна визначити за осцилограмами.

КМ 6.4. Виконати завдання 2 з підрозділу 6.3.1.

Приклад 6.5. Проаналізувати вільні коливання у схемі, зображеній на рис. 6.7, після перемикання ключа в положення 2. До перемикання ємність була заряджена до напруги U_0 , а струм дорівнював нулю.

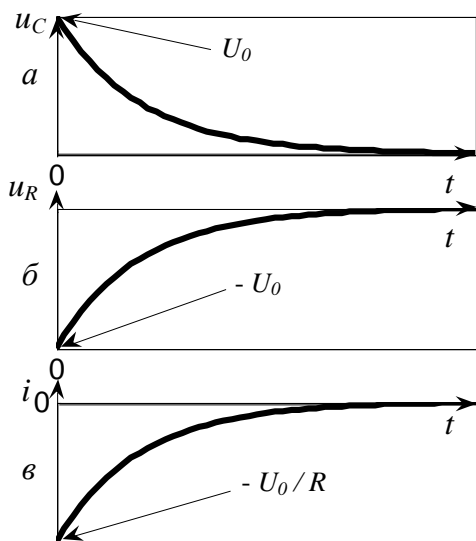


Рис. 6.6

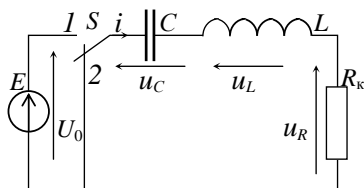


Рис. 6.7

Розв'язання. Складаємо повну систему рівнянь:

$$u_L + u_R + u_C = 0, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt},$$

з якої випливає $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$. Поділивши на LC та вводячи позначення $2\delta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0, \quad (6.10)$$

розв'язок якого має вигляд

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (6.11)$$

де корені характеристичного рівняння $p_1 = -\delta + \gamma$, $p_2 = -\delta - \gamma$, $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Для знаходження сталих інтегрування A_1, A_2 потрібно знайти початкові значення величини $u_C(0)$, та $u'_C(0)$ при $t = 0$. Згідно із законами неперервності $u_C(0) = U_0$, $i(0) = 0$. Далі з елементного рівняння $i = Cu'_C$ знаходимо $u'_C(0) = 0$. Підставивши в (6.11) початкові умови $u_C(0) = U_0$, $u'_C(0) = 0$, $t = 0$, знаходимо: $A_1 = U_0 \frac{\gamma + \delta}{2\gamma}$, $A_2 = U_0 \frac{\gamma - \delta}{2\gamma}$. Таким чином,

$$u_C = \frac{U_0}{2\gamma} \left[(\gamma + \delta) e^{(-\delta + \gamma)t} + (\gamma - \delta) e^{(-\delta - \gamma)t} \right]. \quad (6.12)$$

Подальший аналіз залежить від виду коренів p_1, p_2 , які можуть бути дійсними або ж комплексними. У разі дійсних коренів напруга на ємності, осцилограму якої наведено на рис. 6.8, а, описується виразом (6.12).

Такий розряд ємності у LC -контурі називається аперіодичним. У разі комплексних коренів $p_1 = -\delta + j\omega$, $p_2 = -\delta - j\omega$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Замінивши в (6.12) γ на $j\omega$, одержимо

$$u_C = U_0 e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + \frac{\delta}{\omega} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) = U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (6.13)$$

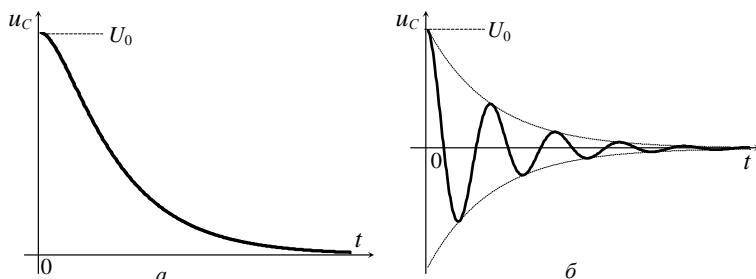


Рис. 6.8

Якщо $\delta \ll \omega$, що зазвичай буває на практиці, останній вираз спрощується:

$$u_c \approx U_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t. \quad (6.14)$$

Такий розряд ємності називається коливальним (рис. 6.8, б).

КМ 6.4. Виконати завдання 3 з підрозділу 6.3.1.

Приклад 6.6. На рис. 6.9, а наведено схему живлення апарата, що складається із блоків A_1, \dots, A_n . Потрібно визначити час, за який напруга на шині живлення після замикання ключа S досягне 95% усталеної величини $U_0 = 30$ В. Якою має бути напруга U джерела E , якщо $R_1 = 10$ Ом, $C = 4000$ мкФ, а сумарний струм, що споживає апарат, $I_0 = 1$ А. ?

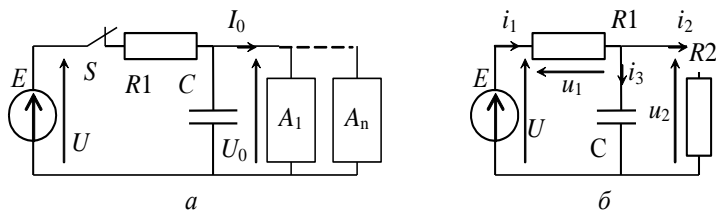


Рис. 6.9

Розв'язання. Будуємо схему заміщення (див. рис. 6.9 б), де R_2 – еквівалент навантаження, опір якого знаходимо як $R_2 = U_0 / I_0 = 30$ Ом. Складаємо повну систему рівнянь:

$$U - u_1 - u_2 = 0, \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0, \quad u_1 = R_1 i_1, \quad u_2 = R_2 i_2, \quad i_3 = C u'_2,$$

яку зводимо до диференціального рівняння відносно напруги та ємності:

$$C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U. \quad (6.15)$$

Процес у даному прикладі є примушеним, оскільки відбувається під дією джерела. Цей процес описується неоднорідним диференціальним рівнянням, розв'язок якого, як показано вище, складається з вільної та примушеної складових. Вільна складова $u_{2в} = A_1 e^{p_1 t}$, де $p_1 = -1/\tau_e$ – корінь характеристичного рівняння $\tau_e p + 1 = 0$, $\tau_e = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Примушену складову шукаємо як сталу величину $u_{2п} = \text{const}$. Підставивши її у (6.15), знаходимо

$$u_{2п} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = u_2(\infty).$$

Таким чином,

$$u_2 = U_{2в} + U_{2п} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_e}} + u_2(\infty). \quad (6.16)$$

Сталу інтегрування визначаємо з початкових умов: $u_2 = 0$ при $t = 0$, що впливає із закону неперервності. Підставивши ці умови в (6.16), знаходимо $A_1 = -U_2(\infty)$. Отже,

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_B}} \right). \quad (6.17)$$

За допомогою вихідної системи рівнянь визначаємо решту змінних:

$$i_3 = C u_2' = \frac{U}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_e}}, \quad i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_e}} \right), \quad i_1 = i_2 + i_3, \quad u_1 = R_1 i_1.$$

Осцилограми розглянутого процесу показано на рис. 6.10.

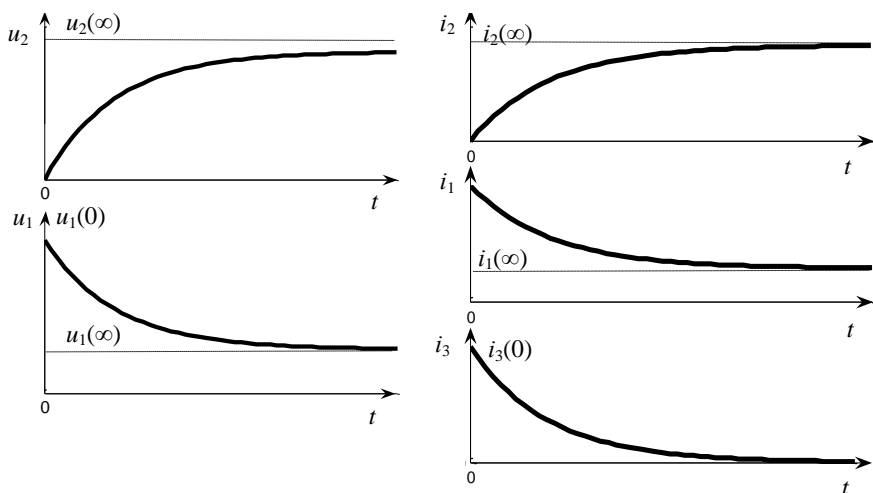


Рис. 6.10

Усталена напруга на шині живлення

$$u_2(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

має дорівнювати за умовами задачі 30 В. Звідси $U = 40$ В. Тривалість встановлення $t_{\text{в}}$ напруги живлення знаходимо, розв'язавши (6.17) відносно часу:

$$t = \tau_e \ln \frac{u_2(\infty)}{u_2(\infty) - u_2}$$

Підставивши сюди $u_2 = 0,95u_2(\infty) = 28,5$ В, $\tau_e = 3 \cdot 10^{-2}$ с, одержимо відповідь: $t_{\text{в}} = 90$ мс.

Приклад 6.7. Проаналізувати процеси у схемі з електромагнітним реле (рис. 6.11, а) після ввімкнення джерела напруги $U = 10$ В. Обмотка реле має параметри: $r = 100$ Ом, $L = 1$ Гн. Визначити запізнення спрацювання реле, зумовлене інерційністю кола, якщо струм ввімкнення реле $i_0 = 50$ мА.

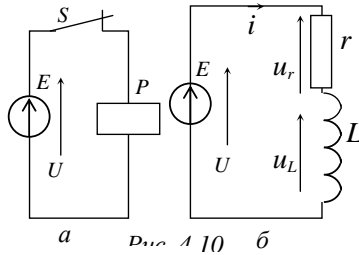


Рис. 6.11

Розв'язання. На рис. 6.11, б показано схему заміщення кола, що підлягає аналізу. Складемо повну систему рівнянь: $u_L + u_R = U$, $u_L = Li'$, $u_R = Ri$, яку зводимо до диференціального рівняння $Li' + Ri = U$. Його розв'язок має вигляд: $i = i_b + i_n$, причому $i_b = A_1 \exp(p_1 t)$, де $p_1 = -1/\tau$, $\tau = L/R$. Оскільки $U = \text{const}$, частинний розв'язок шукаємо у вигляді $i_n = I_0 = \text{const}$. Підставивши це значення у рівняння, знаходимо $i_n = U/R = I_0$. Отже, $i = A_1 \exp(p_1 t) + I_0$. Оскільки до ввімкнення $i = 0$, то за законом не перервності $i(0) = 0$, а отже, $A_1 = -I_0$,

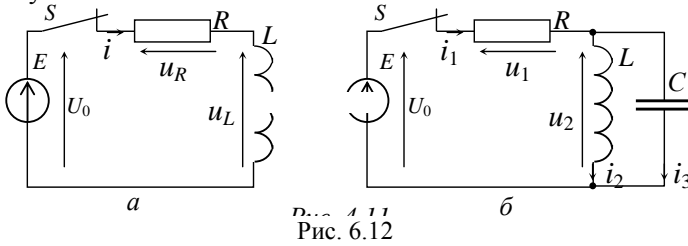
$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (6.18)$$

Далі за допомогою елементних рівнянь знаходимо

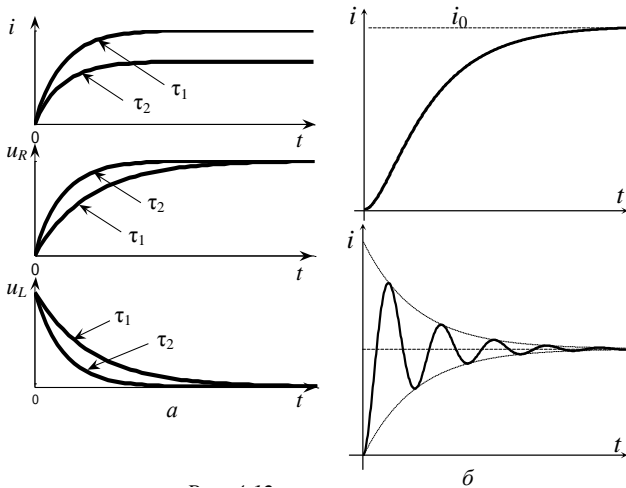
$$u_R = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad u_L = U e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (6.19)$$

Беручи в (6.18) $i = i_0 = 50 \text{ мА}$, $\tau = L/R = 0,01 \text{ с}$, $I_0 = U/R = 100 \text{ мА}$, знаходимо час запізнення вмикання реле $t_3 = \tau \lg \frac{I_0}{I_0 - i_0} = 6,9 \text{ мс}$.

Приклад 6.8. Послідовне з'єднання котушки та опору вмикається до джерела постійної напруги U_0 (рис. 6.12 а) Проаналізувати зміну характеру перехідного процесу залежно від величини опору R резистора. Опором котушки знехтувати.



Розв'язання. Замінивши резистор елементом опору, а котушку — елементом індуктивності, одержимо схему заміщення (рис. 6.12, а). Перехідний процес у такій схемі описується виразами (6.18), (6.19), з яких видно, що у разі збільшення опору R зменшується стала часу τ , а отже, зменшується тривалість перехідного процесу. Крім того, зменшується ustalена величина струму I_0 , а початкова й ustalені величини напруг u_R , u_L не залежать від R . На рис. 6.13, а показано осцилограми для двох значень τ , причому $\tau_1 > \tau_2$.



Приклад 6.9. Під час експериментальної перевірки теоретичного аналізу, виконаного у прикладі 6.8, з'ясувалося, що у разі збільшення опору R характер перехідного процесу змінюється не тільки кількісно, а й якісно: релаксаційний процес переходить у коливальний (рис. 6.13, б) знизу. Треба пояснити результат експерименту і розробити адекватну теоретичну модель аналізованого кола.

Розв'язання. Відомо, що коливальні процеси виникають при взаємному перетворенні енергії. Тому слід врахувати не тільки магнітну, але й електричну енергію, включивши у схему заміщення паразитні ємності, наприклад, міжвиткову ємність котушки, як показано на схемі (рис. 6.12, б). Складаємо систему рівнянь: $u_1 + u_2 = U_0$, $i_1 = i_2 + i_3$, $u_1 = Ri_1$, $u_2 = Li'_2$, $i_3 = Cu'_2$, яку зводимо до диференціального рівняння

$$LCi_2'' + \frac{L}{R}i_2' + i_2 = i_0, \quad (6.20)$$

де $i_0 = U_0/R$. Розв'язок цього рівняння

$$i_2 = i_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}, \quad (6.21)$$

в якому

$$p_1 = -\delta + \gamma, \quad p_2 = -\delta - \gamma, \quad \delta = \frac{1}{2RC}, \quad \gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Для визначення сталих інтегрування A_1 , A_2 необхідно знати початкові умови $i_2(0)$, $i_2'(0)$. За законами неперервності $i_2(0) = 0$, $u_2(0) = 0$. Отже, $i_2' = u_2(0)/L = 0$. Підставивши ці значення у (6.21), знаходимо:

$$A_1 = \frac{p_2 i_0}{2\gamma}, \quad A_2 = -\frac{p_1 i_0}{2\gamma}, \quad \text{Таким чином,}$$

$$i_2 = i_0 + \frac{i_0}{2\gamma} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}). \quad (6.22)$$

Якщо корені p_1 , p_2 дійсні, то струм у (6.22) є сумою сталої складової та двох експонент (див. рис. 6.13, б зверху). Якщо ж $\delta < \omega_0$ або $R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$, то $\gamma = j\omega$, $p_1 = -\delta + j\omega$, $p_2 = -\delta - j\omega$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Тоді (6.22) зводиться до вигляду

$$i = i_0 - i_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right).$$

При $\delta \ll \omega$ або $\delta/\omega \ll 1$ можна прийняти, що $i \approx i_0 - i_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$. Осцилограма такого струму наведена на рис. 6.13, б знизу. Таким чином, врахувавши у схемі конструктивну ємність котушки, ми змогли адекватно змодельовати процеси, що спостерігаються експериментально.

Розглянуті приклади дають змогу припустити, що порядок диференціального рівняння, яке описує процеси в колі, визначається числом реактивних елементів у схемі заміщення. Справді, можна довести, що порядок рівняння дорівнює числу реактивних елементів мінус число перерізів, що містять тільки індуктивні вітки, та число контурів, які містять тільки ємнісні вітки. Отже, схеми з одним реактивним елементом описуються диференціальними рівняннями першого порядку, розв'язок яких має вигляд

$$x(t) = A + B e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (6.23)$$

Такі схеми можна аналізувати якісно, тобто не складаючи та розв'язуючи рівнянь. Для цього достатньо знайти величини A та B . Нехай $t = 0$ і $t = \infty$ (усталений режим). Тоді з (6.23) одержимо $x(0) = A + B$, $x(\infty) = A$, звідки $A = x(\infty)$, $B = x(0) - x(\infty)$. Початкові значення струмів і напруг знаходять за законами неперервності, а при знаходженні усталених величин враховують, що усталений режим — це режим сталих струмів і напруг, за якого напруги на індуктивностях $u_L(\infty) = 0$ і струми на ємностях $i_C(\infty) = 0$. У практичній роботі часто досить мати загальне, якісне уявлення про процеси в апаратурі, чого можна досягти за допомогою якісного аналізу, приклади якого розглянуто нижче.

КМ 6.4. Виконати завдання 1 з підрозділу 6.3.2.

Приклад 6.10. У схемі класичним методом (рис. 6.14) до та після комутації одержати вираз струму та напруги на індуктивності, побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: струми – мА, опори – кОм, індуктивності – мГн, ємності – нФ.

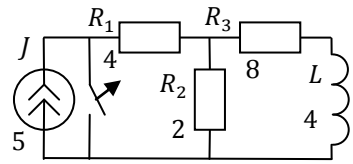


Рис. 6.14

Розв'язання

Розрахунки будемо здійснювати у одиницях: R – кОм, L – мГн, E – В, J – мА, C – нФ, τ – мкс, p – 1/мкс.

Оскільки внутрішній опір джерела струму є нескінченність, то опір R_1 можна не враховувати (знехтуємо у порівнянні з нескінченністю).

Перетворимо джерело струму у джерело напруги (рис. 6.15 а)

$$E_E = R_2 \cdot J = 2 \cdot 5 = 10 \text{ В.}$$

Еквівалентні перетворення

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 2 + 8 = 10 \text{ кОм.}$$

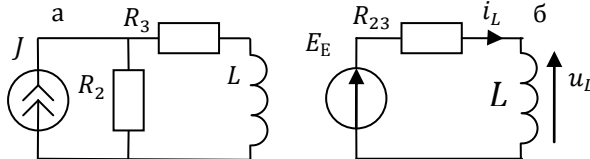


Рис. 6.15

Для схеми (рис. 6.15 б) другий закон Кірхгофа

$$E_E = U_{R23} + U_L.$$

Визначимо напруги:

$$U_{R23} = R_{23}i_L; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

У результаті одержимо

$$E_E = R_{23}i_L + L \frac{di_L}{dt}.$$

Розв'язок рівняння

$$i_L = i_{L.\text{ВИМ}} + i_{L.\text{ВЛЛ}}.$$

Вимушена складова

$$i_{L.\text{ВЛЛ}} = \frac{E_E}{R_{23}} = \frac{10}{10} = 1 \text{ мА.}$$

Однорідне диференціальне рівняння

$$i_L R_{23} + L \frac{du_L}{dt} = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$Lp + R_{23} = 0.$$

Корінь рівняння

$$p = -\frac{R_{23}}{L} = -\frac{10}{4} = -2.5.$$

Вільна складова

$$i_{L,BL/I} = Ae^{pt} = Ae^{-2.5t}.$$

Загальний розв'язок

$$i_L(t) = i_{L,ВИМ} + i_{L,BL/I} = 1 + Ae^{-2.5t}.$$

Струм у нульовий момент часу

$$i_L(0) = 1 + Ae^{-0} = 1 + A.$$

На основі першого закону комутації

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0.$$

Визначимо константу

$$A = i_L(0) - 1 = 0 - 1 = -1.$$

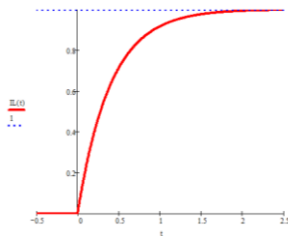
Струм в індуктивності до та після комутації (рис. 6.16 а)

$$i_L(t) = \begin{cases} 1 - 1e^{-2.5t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

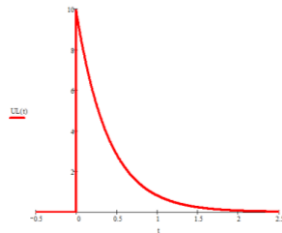
Визначимо напругу (рис. 6.16 б)

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = \begin{cases} 10e^{-2.5t}, & t \geq 0; \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Побудуємо графіки знайдених величин (рис. 6.16).



а)



б)

Рис. 6.16

Відповідь: $i_L(t) = \begin{cases} 1 - 1e^{-2.5t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases} \quad u_L(t) = \begin{cases} 10e^{-2.5t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

6.4. Математичні моделі неперіодичних коливань

6.4.1. Часові моделі та спектри неперіодичних коливань

Часовими моделями сигналів є різноманітні функції. Розглянемо деякі з них: одиничну ступеневу функцію $1(t)$ та одиничну імпульсну функцію, або дельта-функцію $\delta(t)$. *Ступенева функція* (рис. 6.17) визначається так:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0; \\ 1, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Приклад 6.11. На вхід кола в момент $t = 0$ вмикається джерело постійної напруги V_0 . Скласти часову модель вхідної напруги.

Розв'язання. Вхідну напругу можна описати так:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ V_0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Скориставшись ступеневою функцією, дамо відповідь у простішій формі:

$$u(t) = V_0 \cdot 1(t).$$

Приклад 6.12. Скласти часову модель прямокутного імпульсу (рис. 6.18, б).

Розв'язання. Прямокутний імпульс можна подати як суму двох стрибків (рис. 6.18, а), а отже

$$u(t) = U_m \cdot 1(t) - U_m \cdot 1(t - t_0).$$

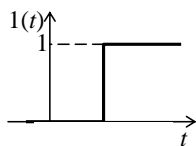


Рис. 6.17

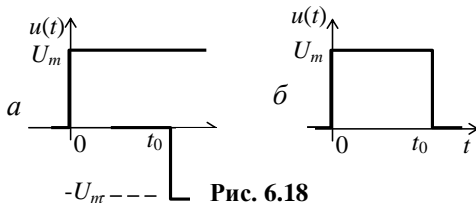


Рис. 6.18

Приклад 6.13. Скласти часову модель трикутного імпульсу (див. рис. 6.19, а).

Розв'язання. Означений імпульс можна подати як суму трьох складових (див. рис. 6.19, б, в, з): $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$. Перша складова – стрибок напруги – описується виразом $u_1(t) = U_m \cdot 1(t)$. Друга складова – ввімкнення напруги, що змінюється в часі лінійно, – описується, як

$u_2(t) = -\frac{U_m}{\tau} \cdot t \cdot 1(t)$. Третя складова така сама, як і друга, але має протилежний знак і запізнюється в часі, отже $u_3(t) = -u_2(t - \tau) = \frac{U_m}{\tau} \cdot (t - \tau) \cdot 1(t - \tau)$. Остаточно маємо:

$$u(t) = U_m \cdot 1(t) - \frac{U_m}{\tau} \cdot t \cdot 1(t) + \frac{U_m}{\tau} \cdot (t - \tau) \cdot 1(t - \tau).$$

Одинична імпульсна функція визначається як

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0; \\ \infty, & t = t_0, \end{cases} \quad (6.24)$$

причому $\int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} \delta(t - t_0) dt = 1, \Delta t > 0$. Ступенева та імпульсна функції пов'язані такими співвідношеннями:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = 1(t - t_0),$$

$$\frac{d}{dt} 1(t - t_0) = \delta(t - t_0). \quad (6.25)$$

Також доводиться, що

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = f(t_0), \quad t_0 \in [a, b]$$

Розглянемо приклад, що покаже необхідність введення такої незвичної функції як δ -функція. Нехай до ідеального джерела підмикається ємність. При замиканні ключа S напруга на ємності змінюється стрибком: $u_C = V_0 1(t)$. Струм в ємності $i = C u'$, але похідної в точці $t = 0$ не існує, бо функція $u_C(t)$ має в ній розрив. Ми маємо ситуацію, коли навіть проста

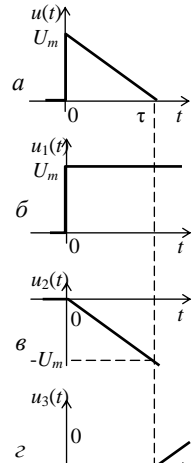


Рис. 6.19

схема не може бути проаналізованою за допомогою класичного диференціального числення. Виходом зі становища може бути зміна схеми, наприклад, ввімкненням послідовно з ємністю опору, що моделює втрати. Або можна вважати, що ключ не ідеальний і напруга змінюється не стрибком, а зростає лінійно безперервно до моменту t_i . Якщо t_i спрямувати до нуля, одержимо стрибок напруги u_C , а струм матиме вигляд прямокутного імпульсу з тривалістю $t_i \rightarrow 0$, амплітудою $I_m \rightarrow \infty$ і площиною $I_m t_i = V_0 C$, тобто $i(t) = V_0 C \delta(t)$.

Неперіодичне коливання розглядають як періодичне з періодом $T \rightarrow \infty$. Справді, якщо на рис. 6.4 збільшити період до нескінченності, то залишається поодинокий імпульс. Тому спектри неперіодичних коливань одержують із виразів (6.4) і (6.5) при $T \rightarrow \infty$. Відомо, що такий граничний перехід існує для абсолютно інтегрованих функцій, тобто таких, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$. При цьому ряд Фур'є переходить в інтеграли Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.26)$$

$$\underline{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (6.27)$$

Функція $\underline{S}(\omega)$ називається *спектральною характеристикою* коливання. Ці вирази утворюють пару *перетворень Фур'є*: пряме (6.27) та обернене (6.26) перетворення Фур'є встановлюють однозначну відповідність між множиною часових моделей (оригіналів) та множиною спектральних характеристик (*зображень*): $f(t) \xrightarrow{F} \underline{S}(\omega)$. Тому спектральні характеристики є математичними (частотними) моделями коливань нарівні з часовими моделями.

При розгляді спектрів прямокутних імпульсів було показано, що зі збільшенням періоду зменшуються амплітуди гармонік і відстань між ними у спектрі. Те саме буде й з коливанням будь-якої форми. Отже, якщо $T \rightarrow \infty$, амплітуди гармонік стають нескінченно малими, а спектр суцільним, так що на будь-якій частоті буде гармоніка. Враховуючи це, можна розглянути вираз (6.26) за аналогією з (6.4) як суму гармонік із нескінченно малими амплітудами $dC = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega$, де $S(\omega)$ — модуль спектральної характеристики.

Звідси випливає $S(\omega) = \pi \cdot \frac{dC}{d\omega}$, тобто модуль спектральної характеристики пропорційний *густині амплітуд гармонік* у спектрі. Спектральними діаграмами неперіодичного коливання є графіки розподілу густини амплітуд $S(\omega)$ та розподілу початкових фаз $\varphi_S(\omega)$ гармонік у спектрі, тобто модуля й аргумента спектральної характеристики. При цьому вважається, що ω визначена від $-\infty$ до $+\infty$.

Оскільки існує відповідність між функціями та їх спектральними характеристиками, має існувати також відповідність між певними операціями над ними, що доводиться у відомих теоремах спектрального аналізу. Нехай $f_k(t) \xleftrightarrow{F} \underline{S}_k(\omega)$, $k = 1, 2, \dots$. Тоді справедливі такі співвідношення:

$$\text{(теорема про лінійність)} \quad \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \xleftrightarrow{F} \sum_{k=1}^n a_k \underline{S}_k(\omega), \quad a_k = \text{const};$$

$$\text{(теорема про диференціювання в часі)} \quad \frac{d}{dt} f_k(t) \xleftrightarrow{F} j\omega \underline{S}_k(\omega);$$

$$\text{(теорема про інтегрування в часі)} \quad \int_{-\infty}^t f_k(t) dt \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} \underline{S}_k(\omega);$$

$$\text{(теорема про згасання)} \quad f_k(t) e^{-at} \xleftrightarrow{F} \underline{S}_k(a + j\omega);$$

$$\text{(теорема про зсув у часі)} \quad f_k(t - t_0) \xleftrightarrow{F} \underline{S}_k(\omega) e^{-j\omega t_0};$$

$$\text{(теорема про зсув за частотою)} \quad f_k(t) e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \underline{S}_k(\omega + \omega_0);$$

$$\text{(теорема про подібність)} \quad f_k(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a} \underline{S}_k\left(\frac{\omega}{a}\right); \quad (6.28)$$

$$\text{(теорема про згортку в часі)} \quad f_k(t) * f_l(t) \xleftrightarrow{F} \underline{S}_k(\omega) \underline{S}_l(\omega),$$

$$\text{де згортка функцій} \quad f_k(t) * f_l(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x) f_l(t - x) dx;$$

$$\text{(теорема про згортку за частотою)} \quad f_k(t) f_l(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}_k(v) \underline{S}_l(\omega - v) dv.$$

Розглянемо важливий для теорії сигналів наслідок теореми про подібність (6.28). При зміні величини a отримують сигнали подібні один одному за формою, але різної тривалості: чим більше a , тим менше тривалість. А при зменшенні тривалості сигналу його спектр розширюється, що ми бачили на прикладі прямокутного імпульсу.

Ця фундаментальна властивість підводить до поняття інформаційної *пропускної здатності каналу* зв'язку. Справді, при збільшенні швидкості передачі сигналів зменшується їх тривалість і розширюється спектр, доки його ширина не перевищить смугу пропускання каналу зв'язку. Подальше збільшення швидкості передачі стає неможливим, бо приводить до сильних частотних спотворень сигналу.

Періодичне колювання можна зобразити як $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(t - nT)$. Скориставшись теоремами про лінійність та зсув у часі, знаходимо спектральну характеристику за формулою

$$\underline{S}_T(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{S}_1(\omega) e^{-j\omega nT} = \underline{S}_1(\omega)(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega T). \quad (6.29)$$

За оберненим перетворенням Фур'є отримуємо

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{S}_1(\omega) \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_1) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{S}_1(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}.$$

Цей вираз є рядом Фур'є (6.4) функції $f_T(t)$, причому комплексна амплітуда n -ї гармоніки

$$\underline{C}_n = \frac{2}{T} \underline{S}_1(n\omega_1). \quad (6.30)$$

Одержана формула встановлює зв'язок між спектрами поодинокого неперіодичного колювання $f_1(t)$ і періодичної послідовності таких колювань $f_T(t)$ з періодом T : комплексні амплітуди гармонік періодичного колювання, а отже, й спектри амплітуд і фаз, знаходимо, помноживши на $2/T$ значення спектральної характеристики поодинокого колювання, взяте на частоті гармоніки.

Розглянемо енергетичні параметри колювань. Знайдемо активну *потужність періодичного струму* $i_T(t)$ в опорі R :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T R i_T^2(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T \left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) \right]^2 dt,$$

де I_0 — стала складова, I_{mn} — амплітуда n -ї гармоніки. Після розкриття дужок одержимо такі інтеграли:

$$\int_0^T I_0^2 dt = I_0^2 T, \quad \int_0^T I_{mn}^2 \cos^2(n\omega_1 t - \varphi_n) dt = \frac{I_{mn}^2}{2} T,$$

$$2 \int_0^T I_{mk} I_{ml} \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \cos(l\omega_1 t - \varphi_l) dt = 0, k \neq l.$$

Підставивши ці значення у вихідний вираз, отримаємо

$$P = R(I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2) = RI^2, \quad (6.31)$$

де I_n — діюче значення n -ї гармоніки, I — діюче значення періодичного струму, звідки

$$I = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}.$$

Отже, маючи спектр амплітуд, можна розрахувати потужність та діюче значення періодичного струму.

Активна, тобто середня за період, потужність при $T \rightarrow \infty$, дорівнює нулю. Тому неперіодичні коливання характеризують не потужністю, а енергією. Знайдемо спочатку енергію періодичного коливання за період.

Враховуючи (6.30) і (6.31), маємо $W_T = PT = RT(I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{mn}^2}{2}) =$

$$= R \left[\frac{S^2(0)}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{T} S^2(n\omega_1) \right].$$

Енергією неперіодичного струму в опорі $R = 1$

Ом знаходимо при $T \rightarrow \infty$, а саме:

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} W_T = \frac{1}{\pi} \int_0^T S^2(\omega) d\omega. \quad (6.32)$$

Цей результат одержано у відомій теоремі Парсеваля. З (6.32) випливає

$$S^2(\omega) = \pi \frac{dW}{d\omega}.$$

Отже, квадрат модуля спектральної характеристики пропорційний густині енергії у спектрі сигналу, тобто описує розподілення енергії у спектрі. Ре-

альні канали зв'язку мають обмежені смуги пропускання. Формула (6.32) дає змогу визначати енергію сигналу на виході каналу із заданим коефіцієнтом передачі у смузі частот від нижньої ω_n до верхньої ω_b :

$$W_{\text{вих}} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_n}^{\omega_b} K^2(\omega) S_{\text{вх}}^2(\omega) d\omega, \text{ де } S_{\text{вх}}(\omega) \text{ — спектральна густина вхідного сиг-}$$

налу. Можна ставити й обернену задачу: якою має бути смуга пропускання каналу зв'язку, щоб передати певну частину енергії сигналу, що важливо знати для узгодження сигналу з каналом зв'язку.

6.4.2. Операторні зображення сигналів

Як було показано, перетворення Фур'є має обмежене застосування. Для багатьох функцій, що моделюють сигнали, спектральна характеристика не може бути визначена. Більш універсальним є *перетворення Лапласа*, яке застосовне практично до всіх функцій, що моделюють сигнали. Воно має такий вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p) e^{pt} dp, \quad (6.33)$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (6.34)$$

де $p = \sigma + j\omega$ називається комплексною частотою. Вирази (6.33) і (6.34) визначають обернене та пряме перетворення Лапласа. Функція часу $f(t)$ називається оригіналом, а функція $F(p)$ комплексної змінної p — *зображенням за Лапласом*. Оригінал повинен задовольняти вимоги: $f(t) = 0$ при $t < 0$ та $f(t) < Ae^{\sigma_1 t}$ при $t \geq 0$. Ці вимоги завжди виконуються для реальних сигналів, що мають початок у часі, а їх величина не зростає до нескінченності. Перетворення Лапласа встановлює відповідність $f(t) \xrightarrow{L} F(p)$ між множинами оригіналів та їх зображень. Отже, останні можна розглядати як математичні (частотні) моделі сигналів. Зауважимо, що при $p = j\omega$ або ж $\sigma = 0$ перетворення Лапласа (6.33) і (6.34) переходять у перетворення Фур'є (6.3) і (6.4).

Відповідності між операціями над оригіналами та зображеннями визначаються теоремами операторного числення. Нехай $f_k(t) \xrightarrow{L} F_k(p)$, $k = 1, 2, \dots$. Тоді мають місце такі співвідношення:

$$\text{теорема про лінійність} \quad \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \xleftrightarrow{L} \sum_{k=1}^n a_k F_k(p); \quad (6.35)$$

$$\text{теорема про диференціювання оригіналу} \quad f_k'(t) \xleftrightarrow{L} pF_k(p) - f_k(0),$$

$$f_k^{(n)}(t) \xleftrightarrow{L} p^n F_k(p) - p^{n-1} f_k(0) - \dots - f_k^{(n-1)}(0);$$

$$\text{теорема про інтегрування оригінала} \quad \int_0^t f_k(x) dx + A_k \xleftrightarrow{L} \frac{F_k(p)}{p} + \frac{A_k}{p};$$

$$\text{теорема про згортку оригіналу} \quad f_k(t) * f_l(t) \xleftrightarrow{L} F_k(p) F_l(p);$$

$$\text{теорема про подібність} \quad f_k(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{a} F_k\left(\frac{p}{a}\right);$$

$$\text{теорема про зсув у часі} \quad f_k(t - t_0) \xleftrightarrow{L} F_k(p) e^{-pt_0}; \quad (6.36)$$

$$\text{теорема про згасання} \quad f_k(t) e^{-at} \xleftrightarrow{L} F_k(p + a); \quad (6.37)$$

$$\text{теорема про диференціювання зображення} \quad t f_k(t) \xleftrightarrow{L} \frac{d}{dp} F_k(p), \quad (6.38)$$

$$t^n f_k(t) \xleftrightarrow{L} (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F_k(p);$$

$$\text{граничні теореми} \quad \lim_{t \rightarrow 0} f_k(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F_k(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_k(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F_k(p)$$

$$\text{теорема розкладання} \quad F(p) = \frac{M(p)}{N(p)} \xleftrightarrow{L} \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} 1(t),$$

де $M(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$, $N(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$, p_k — прості корені полінома $N(p)$,

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} [(p - p_k) F_k(p)] = \frac{M(p_k)}{a_n (p_k - p_1) \dots (p_k - p_{k-1}) (p_k - p_{k+1}) \dots (p_k - p_n)}. \quad (6.39)$$

Практично перехід від оригіналів до зображень і навпаки виконується за допомогою цих теорем і таблиць зображень за Лапласом. Покажемо це на прикладах. За формулою (6.34) знаходимо зображення ступеневої функції

$$\int_0^\infty 1(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \xleftrightarrow{L} 1(t). \quad (6.40)$$

За теоремою (7.14) знаходимо зображення експоненціального імпульсу:

$$e^{-at}1(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{p+a}. \quad (6.41)$$

За теоремою про лінійність, а також скориставшись зображеннями (6.40) і (6.41), знаходимо

$$(1 - e^{-at})1(t) \xleftrightarrow{L} \frac{a}{p(p+a)}.$$

Згідно з (6.37)

$$t1(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{p^2}. \quad (6.42)$$

Зображення δ -функції одержимо, застосувавши формули (6.11) та (6.2):

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1 \xleftrightarrow{L} \delta(t).$$

Зауважимо, що таблиці зображень за Лапласом можна використовувати для знаходження спектральних характеристик, підставляючи $p = j\omega$. Проте слід пам'ятати, що такий формальний прийом застосовний лише до абсолютно інтегрованих функцій.

6.5. Частотний метод аналізу

Зміну форми сигналів у лінійних колах можна пояснити як прояв інерційності ЕМК, а також із позицій частотних уявлень як результат фільтрації. Справді, інерційні кола по-різному передають коливання різних частот, що призводить до зміни спектра, а отже, й форми сигналів. Властивість лінійних кіл змінювати форму сигналів може бути небажаною і розглядається як частотні спотворення. Але ця властивість може використовуватись із метою надання сигналові потрібної форми. Знайдемо *умови неспотвореної передачі сигналів*. Будемо вважати сигнал не спотвореним, коли він пропорційний вхідному сигналу та може бути запізненим у часі, а саме: $y(t) = k_0 x(t - t_0)$, де k_0 — коефіцієнт пропорційності, t_0 — час запізнення. Тоді спектральна характеристика вихідного сигналу $\underline{S}_y(\omega) = k_0 \underline{S}_x(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$, звідки знаходимо комплексну передавальну функцію, її модуль і аргумент $\underline{K}(\omega) = \frac{\underline{S}_y(\omega)}{\underline{S}_x(\omega)} = k_0 e^{-j\omega t_0}$, $K(\omega) = k_0$,

$\varphi_k(\omega) = -\omega t_0$, які описують АЧХ та ФЧХ неспотворюючого кола (див. рис. 6.20). Отже, неспотворююче коло повинно мати рівномірну АЧХ та лінійну ФЧХ у всьому діапазоні частот. При цьому ФЧХ має крутизну $\frac{d}{d\omega} \varphi_k(\omega) = -t_0$, що дорівнює часові затримки.

Реальні кола мають обмежені смуги пропускання, а отже, не задовольняють умови неспотвореної передачі. Однак реальні сигнали теж мають обмежені за частотою спектри. Ця обставина дає змогу сформулювати умови неспотвореної передачі реальних сигналів через реальні кола: потрібно мати рівномірну АЧХ та лінійну ФЧХ у смузі частот, яку займає спектр сигналу.

Для формування сигналів часто застосовують *диференціюючі й інтегруючі кола*, в яких вихідні сигнали пропорційні відповідно похідній та інтегралові від вхідного сигналу:

$$y(t) = k_0 x'(t),$$

$$y(t) = k_0 \int x(t) dt.$$

Для диференціюючого кола маємо: $\underline{S}_y(\omega) = j\omega k_0 \underline{S}_x(\omega)$, звідки знаходимо:

$$\underline{k}_d(\omega) = j\omega k_0 = k_0 \omega e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad k_d(\omega) = k_0 \omega, \quad \varphi_d(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.43)$$

Аналогічно для інтегруючого кола:

$$k_i(\omega) = \frac{k_0}{\omega}, \quad \varphi_i(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (6.44)$$

Частотні характеристики диференціюючого кола, що відповідають (6.43), побудовано на рис. 6.21, а частотні характеристики інтегруючого кола — на рис. 6.22.

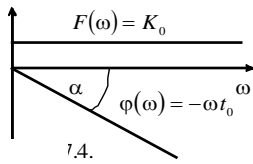


Рис. 6.20

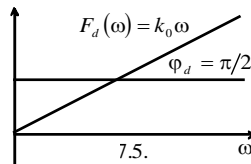


Рис. 6.21

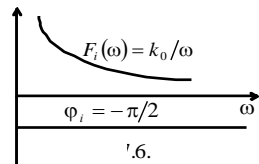


Рис. 6.22

Реальні кола не можуть мати АЧХ, які сягають у нескінченність, як на рис. 6.21 і 6.22. Які ж реальні кола і за яких умов можуть наближатися за своїми властивостями до ідеальних диференціюючого та інтегруючого кіл? З цією метою розглянемо найпростіші RC - та RL -ланцюжки (див. рис. 6.6 *а, б*), що мають коефіцієнт передачі напруги (див. прикл. 6.3): $\underline{K}_U(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$. Якщо

$$\omega\tau \gg 1, \text{ маємо } \underline{K}_U(\omega) \approx \frac{1}{j\omega\tau} = \frac{1}{\omega\tau} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \text{ як в інтегруючого кола [див. (6.44)].}$$

Отже, якщо спектр сигналу розташований у смузі частот $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, то такі ланцюжки для цього сигналу будуть інтегруючими, при цьому чим більша стала часу τ , тим точніше інтегрується сигнал. На рис. 6.23 з метою порівняння показані ЧХ ідеального інтегруючого кола (пунктир) і ланцюжків (рис. 6.6, *а, б*) для різних τ .

Коефіцієнт передачі напруги ланцюжків (див. рис. 6.6, *в, з*) $\underline{K}_U(\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$. За умови $\omega\tau \ll 1$ маємо: $\underline{K}_U(\omega) \approx j\omega\tau = \omega\tau e^{j\frac{\pi}{2}}$, що аналогічне (6.44). Отже, ці ланцюжки можуть використовуватись як диференціюючі для сигналів, спектр яких розташований на частотах $\omega \ll \frac{1}{\tau}$. При цьому чим

менше τ , тим у ширшій смузі буде виконуватиметься ця умова, а отже, краще буде диференціюватися сигнал. На рис. 6.45 показано ЧХ ідеального диференціюючого кола (пунктир) і ланцюжків (див. рис. 6.6, *в, з*) для різних τ , що підтверджує зроблений висновок.

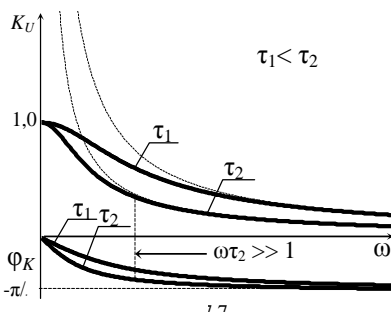


Рис. 6.44

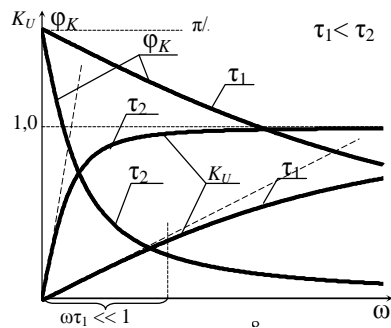


Рис. 6.45

КМ 7.1. Виконати завдання 1 і 2 з підрозділу 7.5.1.

6.6. Операторний метод аналізу лінійних кіл

Операторний метод є найуніверсальнішим методом аналізу кіл. Це зумовлено тим, що при застосуванні цього методу інтегро-диференціальні рівняння перетворюються в алгебраїчні відносно операторних зображень, що суттєво спрощує їх розв'язання, в результаті якого знаходять зображення шуканих змінних, за якими одержують і їх часові моделі. Такий підхід притаманний і методам спектральному та символічному (методу комплексних амплітуд), які також перетворюють інтегро-диференціальні рівняння в алгебраїчні. Але символічний метод застосовується лише до гармонічних коливань, а спектральний обмежений сферою застосування перетворення Фур'є, тоді як операторний метод застосовується до аналізу будь-яких режимів лінійних кіл.

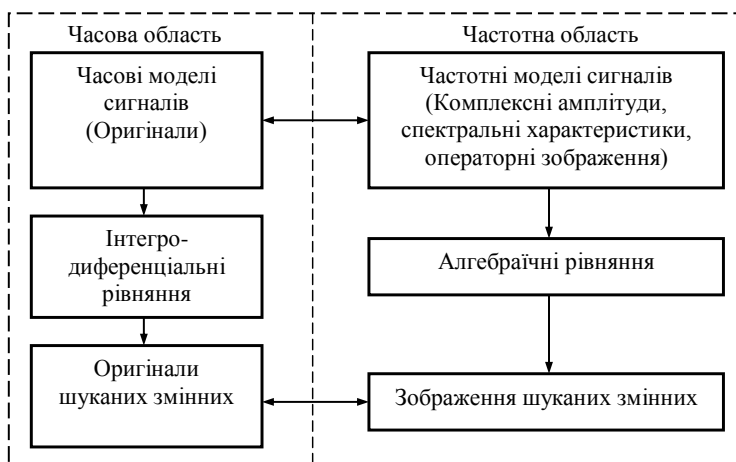


Рис. 6.46

На рис. 6.46 зображено структурно-логічну схему, що пояснює застосування методів аналізу. Як видно, основними етапами аналізу будь-яким методом є складання рівнянь схеми, їх розв'язання та перехід від часових моделей до частотних і у зворотному порядку, що здійснюється за допомогою перетворень Штейнметца, Фур'є та Лапласа.

Рівняння схем складаються за елементними рівняннями та законами Кірхгофа. Застосовуючи до них перетворення Штейнметца, Фур'є, Лапласа, отримують рівняння у *комплексній, спектральній та операторній* формах (див. табл. 6.1). Як бачимо, перетворені рівняння мають такий самий вигляд, як і рівняння неінерційних кіл. Тому всі методи складання та розв'язання рівнянь схем, що розглянуті у розділі 3, застосовні для будь-яких лінійних кіл, якщо оперувати частотними моделями, а також комплексними та операторними параметрами. *Операторні опори та провідності*, згідно з табл. 6.1, визначають таким чином:

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = pL, \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}, \quad Y_R(p) = G, \quad Y_L(p) = \frac{1}{pL}, \quad Y_C(p) = pC.$$

Зауважимо, що при заміні $p = j\omega$ операторні параметри переходять у комплексні. Операторні рівняння можна отримати, застосовуючи перетворення Лапласа до рівнянь, складених у часі. Але краще складати операторні рівняння безпосередньо для *операторних схем*, які одержують заміною елементів операторними елементами згідно з табл. 6.2. Методику аналізу операторним методом розглянуто в наведених далі прикладах.

Таблиця 6.1

Математичні моделі коливань				
Елементні рівняння	Часові моделі	Комплексні амплітуди	Спектральні характеристики	Операторні зображення
	$u = Ri$ $i = Gu$	$\underline{U} = R\underline{I}$ $\underline{I} = G\underline{U}$	$\underline{S}_U(j\omega) = R\underline{S}_I(j\omega)$ $\underline{S}_I(j\omega) = G\underline{S}_U(j\omega)$	$U(p) = RI(p)$ $I(p) = GU(p)$
	$u = L di/dt$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$	$\underline{U} = \underline{Z}_L \underline{I}, \underline{Z}_L = j\omega L$ $\underline{I} = \underline{Y}_L \underline{U}, \underline{Y}_L = -j/\omega L$	$\underline{S}_U(j\omega) = \underline{Z}_L \underline{S}_I(j\omega)$ $\underline{S}_I(j\omega) = \underline{Y}_L \underline{S}_U(j\omega)$	$U(p) = pLI(p)$ $I(p) = \frac{1}{pL} U(p)$
	$u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C du/dt$	$\underline{U} = \underline{Z}_C \underline{I}, \underline{Z}_C = -j/\omega C$ $\underline{I} = \underline{Y}_C \underline{U}, \underline{Y}_C = j\omega C$	$\underline{S}_U(j\omega) = \underline{Z}_C \underline{S}_I(j\omega)$ $\underline{S}_I(j\omega) = \underline{Y}_C \underline{S}_U(j\omega)$	$U(p) = \frac{1}{pC} I(p)$ $I(p) = pCU(p)$
Законои Кірхгофа	$\sum_{k=1}^n i_k = 0$ $\sum_{k=1}^n u_k = 0$	$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0$ $\sum_{k=1}^n \underline{U}_k = 0$	$\sum_{k=1}^n \underline{S}_{I_k} = 0$ $\sum_{k=1}^n \underline{S}_{U_k} = 0$	$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0$ $\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0$

Приклад 6.4. Розв'язати приклад 6.1 операторним методом.

Розв'язання. Склавши рівняння у часі (6.3) й застосувавши перетворення Лапласа, одержимо операторне рівняння $pLI(p) - Li(0) + RI(p) = 0$, яке можна скласти також за операторною схемою (рис. 6.47). Знаходимо зображення струму: $I(p) = \frac{Li(0)}{pL + R} = i(0) \frac{1}{p + 1/\tau}$. Оригінал знаходимо згідно з (6.19), а

саме $i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1(t)$.

Приклад 6.5. Проаналізувати процеси у схемі (див. рис. 6.6), після перемикання ключа S із положення 2 у положення 1 при нульових початкових умовах.

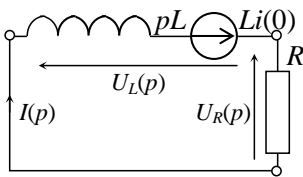


Рис. 6.47

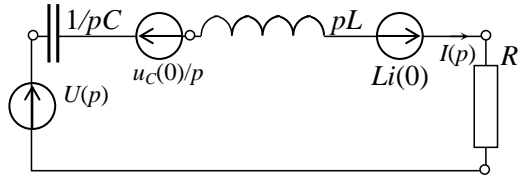


Рис. 6.48

Розв'язання. Будуємо операторну схему (див. рис. 6.48) і складаємо таке рівняння:

$$U(p) + Li(0) - U_C(0)/p = (pL + R + 1/pC)I(p),$$

з якого при нульових початкових умовах отримуємо $I(p) = \frac{U(p)}{pL + R + 1/pC}$. При перемиканні ключа напруга на вході схеми змінюється стрибком: $u(t) = U1(t)$. Тому згідно з (6.18) $U(p) = U/p$. Тоді

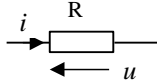
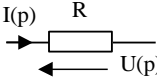
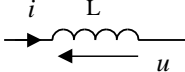
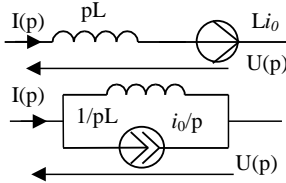
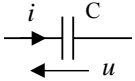
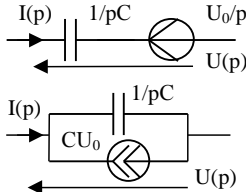
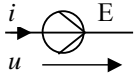
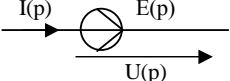
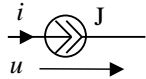
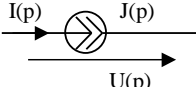
$$I(p) = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)},$$

де $2\delta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $p_1 = -\delta + \gamma$, $p_2 = -\delta - \gamma$, $\gamma = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Застосувавши теорему розкладання, знаходимо оригінал струму $i(t) = (A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$, де $A_1 = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p_1 - p_2}$, $A_2 = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p_2 - p_1} = -A_1$.

Отже, $i(t) = \frac{U}{2L\gamma} (e^{(-\delta+\gamma)t} - e^{(-\delta-\gamma)t}) \cdot 1(t)$. Якщо $\gamma = j\omega$ (див. прикл. 6.3), маємо

$$i(t) = \frac{U}{\omega L} e^{-\delta t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{U}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t \cdot 1(t).$$

Таблиця 6.2

Схемний елемент	Операторна схема	Операторне рівняння
		$U(p) = RI(p)$ $I(p) = GU(p)$
		$U(p) = pLI(p) - Li_0$ $I(p) = \frac{1}{pL}U(p) + \frac{i_0}{p}$
		$U(p) = \frac{1}{pC}I(p) + \frac{U_0}{p}$ $I(p) = pCU(p) - CU_0$
		$U(p) = E(p)$ $-\infty \leq I(p) \leq \infty$
		$I(p) = J(p)$ $-\infty \leq U(p) \leq \infty$

Знайдемо тепер напругу на ємності: $U_c(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_c(0)}{p} = \frac{U}{LC} \cdot \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}$. За теоремою розкладання одержуємо оригінал напруги.

$$u_c(t) = \frac{U}{LC} \left[\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)} e^{p_2 t} \right] \cdot 1(t).$$

Оскільки $p_1 p_2 = \omega_0^2 = 1/LC$, $p_1 - p_2 = 2\gamma$, маємо $u(t) = U(1 + \frac{p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}}{2\gamma}) \cdot 1(t)$. У випадку комплексних коренів $\gamma = j\omega$. Тоді

$$u_c(t) = U \left[1 - e^{-\delta t} \left(\cos \omega t - \frac{\delta}{\omega} \sin \omega t \right) \right] \cdot 1(t).$$

Аналогічно знаходять напруги опора та індуктивності, осцилограми яких показано на рис. 6.49.

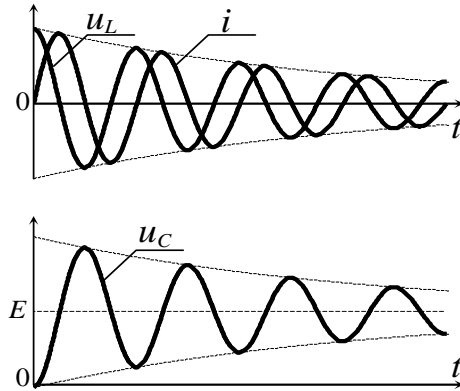


Рис. 6.49

КМ 6.2. Виконати завдання 3 з підрозділу 6.3.1.

Приклад 6.6. Прямокутний імпульс напруги (див. рис. 7.2) від джерела із внутрішнім опором R_i через розділовий конденсатор C передається у навантаження з параметрами R_H, C_H (рис. 6.50). Оцінити спотворення форми імпульсу.

Розв'язання. Оригінал напруги джерела $u(t) = U_m 1(t) - U_m 1(t - t_0)$ (див. прикл. 7.2). Його зображення $U(p) = \frac{U_m}{p} (1 - e^{-pt_0})$. Знаходимо операторний коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{\tau_3 p}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)p + 1},$$

де $Z_1(p) = R_i + 1/pC$, $Z_2(p) = \frac{R_H}{R_H C_H p + 1}$, $\tau_1 = CR_i$, $\tau_2 = C_H R_H$, $\tau_3 = CR_H$. Зображення напруги на навантаженні

$$\begin{aligned} U_H(p) &= K_U(p) \cdot U(p) = U_m \frac{\tau_3 (1 - e^{-pt_0})}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)p + 1} = \\ &= U_m \frac{\tau_3}{\tau_1 \tau_2} \cdot \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} (1 - e^{-pt_0}) = U_1(p) + U_2(p) \end{aligned} \quad (6.45)$$

де
$$p_{1,2} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)^2 - 4\tau_1 \tau_2}}{2\tau_1 \tau_2}. \quad (6.46)$$

За теоремою розкладання знаходимо оригінал першого доданка в (6.45):

$$u_1(t) = U_m \frac{\tau_3}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)^2 - 4\tau_1 \tau_2}} \cdot (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1(t). \quad (6.47)$$

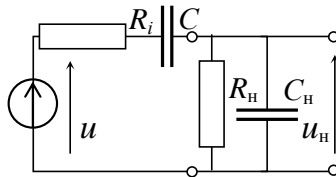


Рис. 6.50

Оригінал другого доданку згідно з теоремою про зсув у часі $u_2(t) = -u_1(t - t_0)$. На практиці зазвичай буває $C \gg C_H$, $R_H \gg R_i$. Тоді вирази

(6.48), (6.47) зводяться до вигляду $p_1 \approx -1/\tau_3$, $p_2 \approx -1/C_n R_i = -1/\tau_4$,
 $u_1(t) \approx U_m (e^{-\frac{t}{\tau_3}} - e^{-\frac{t}{\tau_4}}) \cdot 1(t)$. Напруга $u_1(t)$ дорівнює різниці двох експонент, перша з яких зменшується повільно, а друга — швидко, бо $\tau_3 \gg \tau_4$ (рис. 6.51).

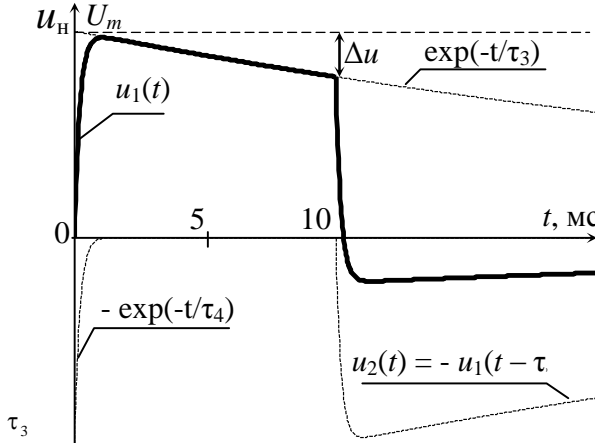


Рис. 6.51

В інтервалі $0 \leq t \leq t_0$ $u_n(t) = u_1(t)$, а при $t \geq t_0$ $u_n = u_1(t) + u_2(t)$. На рис. 6.51 побудовано осцилограми напруги $u_n(t)$ для таких параметрів: $U_m = 1$ В, $t_0 = 10$ мс, $\tau_3 = 50$ мс, $\tau_4 = 1$ мс. Як бачимо, спотворення імпульсу полягає у згладжуванні фронту та сколюванні вершини. Перше характеризують тривалістю фронту t_ϕ — час, за який напруга $u_n(t)$ зростає від 0,1 до 0,9 амплітуди імпульсу. При $\tau_4 \ll \tau_3$, $t \approx \tau_4$ вихідний імпульс можна описати як $u_n(t) \approx U_m (1 - e^{-t/\tau_4})$. Покладаючи $u_n(t_1) = 0,1U_m$, $u_n(t_2) = 0,9U_m$, знаходимо $\tau_\phi = t_2 - t_1 = \tau_4 \ln 9 = 2,2\tau_4$. Отже, тривалість фронту визначається сталою часу τ_4 . При $t \gg \tau_4$ маємо $u_n(t) \approx U_m e^{-t/\tau_3}$, звідки при $t = t_0$ знаходимо сколювання імпульсу:

$$\delta = \frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{U_m - U_m e^{-t_0/\tau_3}}{U_m} = 1 - e^{-t_0/\tau_3}.$$

Отже, сколювання тим менше, чим більша стала часу τ_3 .

КМ 6.3. Виконати завдання з розділу 6.5.2.

Приклад 6.7. У колі (рис. 6.52) операторним методом знайти напругу $u_C(t)$ та струм $i_C(t)$ на ємності, побудувати їх графік. Напруга джерела $e(t) = 12 \cdot e^{-3t}$ В, $t \geq 0$. Числові значення елементів кола: опори – кОм, ємності – нФ.

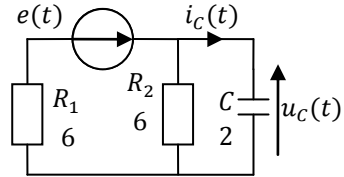


Рис. 6.52

Розв'язання

Напруга джерела напруги у операторній формі

$$E(p) = \frac{12}{p+3}.$$

Перетворимо джерело напруги у джерело струму та еквівалентний опір (рис. 6.53 а)

$$J(p) = \frac{E(p)}{R_1} = \frac{2}{p+3}; \quad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 6}{6+6} = 3 \text{ кОм}.$$

За формулою дільника струму (рис. 6.53 б)

$$I_C(p) = J(p) \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + \frac{1}{pC}} = \frac{2}{p+3} \cdot \frac{6p}{3+2p} = \frac{6p}{(p+3)(p+1.5)}.$$

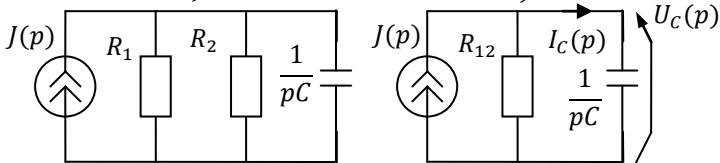


Рис. 6.53

Операторна напруга на ємності за законом Ома та теоремою розкладання

$$U_C(p) = I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} = \frac{6p}{(p+3)(p+1.5)} \cdot \frac{1}{2p} = \frac{3}{(p+3)(p+1.5)}.$$

За теоремою розкладання

$$U_c(p) = \frac{3}{(p+3)(p+1.5)} = \frac{B_1}{p+1.5} + \frac{B_2}{p+3}.$$

Коефіцієнти при лишках функції в особливих точках

$$B_1 = \frac{3}{(p+3)} \Big|_{p=-1.5} = \frac{3}{(-1.5+3)} = 2;$$

$$B_2 = \frac{3}{(p+1.5)} \Big|_{p=-3} = \frac{3}{(-3+1.5)} = -2.$$

Напруга у вигляді суми простих дробів (рис. 6.54 а)

$$U_c(p) = \frac{2}{p+1.5} - \frac{2}{p+3}.$$

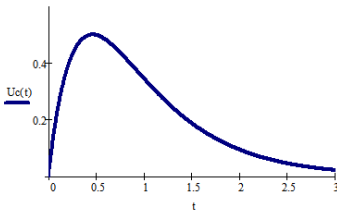
За таблицею Лапласа

$$u_c(t) = 2e^{-1.5t} - 2e^{-3t} \text{ В}, \quad t \geq 0.$$

Струм в ємності (рис. 6.54 б)

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = 6e^{-1.5t} + 12e^{-3t} \text{ мА}, \quad t \geq 0.$$

а)



б)

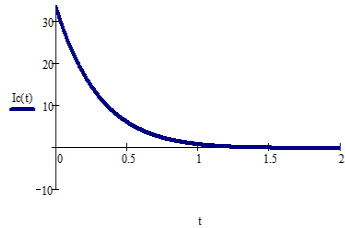


Рис. 6.54

Відповідь: $i_c(t) = 6e^{-1.5t} + 12e^{-3t} \text{ мА}, \quad t \geq 0;$

$u_c(t) = 2e^{-1.5t} - 2e^{-3t} \text{ В}, \quad t \geq 0.$

Приклад 6.8. У колі (рис. 6.55) до та після комутації визначити значення напруги та струму на індуктивності, побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруги – В, опори – кОм, індуктивності – Гн.

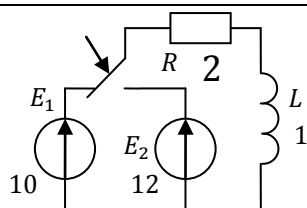


Рис. 6.55

Розв'язання

Для кола після комутації за другим законом Кірхгофа

$$E_2 = u_R + u_L = L \frac{di_L}{dt} + i_L R.$$

Розв'язок рівняння

$$i_L(t) = i_{L.\text{вим}} + i_{L.\text{вл}}.$$

Вимушена складова

$$i_{L.\text{вим}} = \frac{E_2}{R} = \frac{12}{2} = 6 \text{ мА}.$$

Для визначення вільної складової

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = 0.$$

Введемо заміну

$$p i_L \leftrightarrow \frac{di_L}{dt}.$$

Характеристичне рівняння

$$Lp + R = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Вільна складова

$$i_{L.\text{вл}} = Ae^{pt} = Ae^{-2t}.$$

Загальний розв'язок

$$i_L(t) = i_{L.\text{вим}} + i_{L.\text{вл}} = 6 + Ae^{-2t}.$$

Загальний розв'язок у нульовий момент часу

$$i_L(0) = 6 + A.$$

На основі першого закону комутації

$$i_L(0) = i_L(0-) = E_1/R = 10/2 = 5 \text{ мА}.$$

Звідси константа

$$A = i_L(0) - 6 = 5 - 6 = -1.$$

Вирази струму та напруги до та після комутації (рис. 6.56)

$$i_L(t) = \begin{cases} 5, & t < 0, \\ 6 - 1e^{-2t}, & t \geq 0, \end{cases} \text{ мА;}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2e^{-2t}, & t \geq 0, \end{cases} \text{ В.}$$

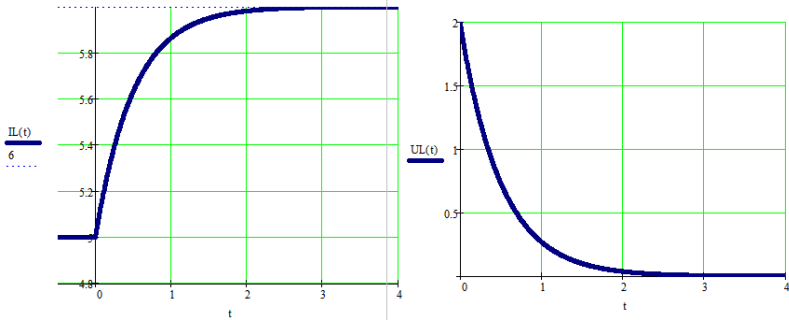


Рис. 6.56

Приклад 6.9. У колі (рис. 6.57) до та після комутації визначити напругу та струм на ємності, побудувати їх графіки. Числові значення елементів наведені на схемі: напруги – В, опори – кОм, індуктивності – Гн, ємності – нФ.

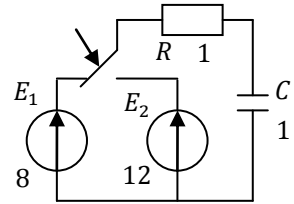


Рис. 6.57

Розв'язання

Для кола після комутації за другим законом Кірхгофа

$$E_2 = u_R + u_C = CR \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Розв'язок рівняння

$$u_C(t) = u_{C.\text{вим}} + u_{C.\text{вл}}.$$

Вимушена складова

$$u_{C.\text{вим}} = E_2 = 12 \text{ В.}$$

Для визначення вільної складової

$$CR \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Введемо заміну

$$pU_C \leftrightarrow \frac{du_C}{dt}.$$

Характеристичне рівняння

$$CRp + 1 = 0.$$

Корінь характеристичного рівняння

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{1 \cdot 1} = -1.$$

Вільна складова

$$u_{C.ВЛ} = Ae^{pt} = Ae^{-t}.$$

Загальний розв'язок

$$u_C(t) = u_{C.ВМ} + u_{C.ВЛ} = 12 + Ae^{-t}.$$

Загальний розв'язок у нульовий момент часу

$$u_C(0) = 12 + A.$$

На основі другого закону комутації

$$u_C(0) = u_C(0-) = E_1 = 8 \text{ В}.$$

Звідси константа

$$A = u_C(0) - 12 = 8 - 12 = -4.$$

Вирази струму та напруги до та після комутації (рис. 6.58)

$$u_C(t) = \begin{cases} 8, & t < 0, \\ 12 - 4e^{-t}, & t \geq 0, \end{cases} \text{ В};$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 4e^{-t}, & t \geq 0, \end{cases} \text{ мА}.$$

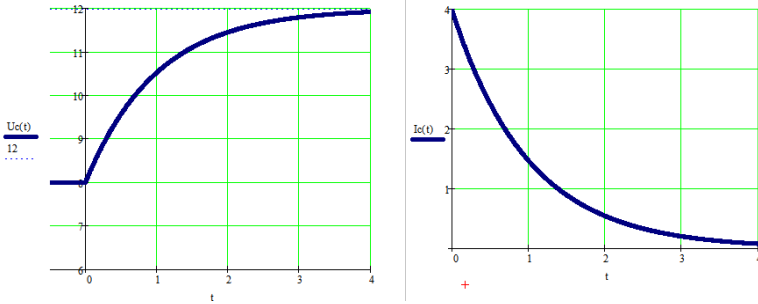


Рис. 6.58

6.7. Аналіз лінійних кіл методом інтегралів згортки

6.7.1. Часові характеристики та операторні схемні функції

Поряд із частотними характеристиками властивості лінійних кіл описуються ще й *часовими характеристиками* – перехідною (ПХ) та імпульсною (ІХ). *Перехідною характеристикою* $h(t)$ називають відношення реакції на ступеневу дію $A_m \cdot 1(t)$ до величини A_m , а *імпульсною характеристикою* $g(t)$ – відношення реакції на дію імпульсу $\sigma\delta(t)$ до величини σ за нульових початкових умов.

Часові характеристики пов'язані з частотними через операторні схемні функції. *Операторною схемною функцією* (СФ) називають відношення операторних зображень змінних реакції $X(p)$ та дії $Q(p)$: $F(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$. Підстанов-

ка $p = j\omega$ перетворює операторну СФ у комплексну:

$\underline{F}(\omega) = \frac{\underline{X}(\omega)}{\underline{Q}(\omega)} = F(\omega)e^{j\varphi_F(\omega)}$, де $F(\omega)$ – АЧХ, $\varphi_F(\omega)$ – ФЧХ. Часові харак-

теристики також можна знаходити, маючи схемні функції. Нехай дія $q(t) = A_m \cdot 1(t)$, а реакція $x(t)$. Тоді $h(t) = \frac{x(t)}{A_m}$, $Q(p) = \frac{A_m}{p}$, $H(p) = \frac{X(p)}{A_m}$, звідки

$$H(p) = \frac{X(p)}{pQ(p)} = \frac{F(p)}{p}. \quad (6.48)$$

Отже, зображення перехідної характеристики дорівнює операторній схемній функції, поділеній на p . Аналогічно доводиться, що зображення ІХ дорівнює схемній функції:

$$G(p) = F(p). \quad (6.49)$$

Зіставляючи (6.48) і (6.49), знаходимо

$$H(p) = \frac{1}{p} G(p), \text{ або, } h(t) = \int_0^t g(t) dt, \quad g(t) = h'(t). \quad (6.50)$$

Згідно з (6.27) та (6.28) будь-яка СФ має вигляд $F(p) = \Delta_\alpha / \Delta_\beta$. Якщо розкрити визначник та алгебраїчні доповнення матриці операторних параметрів, СФ зводиться до такого вигляду:

$$F(p) = F_0 \frac{(p - z_1) \dots (p - z_m)}{(p - p_1) \dots (p - p_n)}, \quad (6.51)$$

де $F_0 = \text{const}$; $z_1 \dots z_m$ — корені чисельника, що називаються нулями СФ; $p_1 \dots p_n$ — корені знаменника — полюси СФ. Отже, СФ цілком визначається своїми нулями та полюсами. Оскільки $G(p) = F(p)$, то, застосовуючи до (6.51) теорему розкладання (6.16), одержуємо оригінал ІХ:

$$g(t) = \sum_{k=1}^n G_k e^{p_k t} \cdot 1(t),$$

де згідно з (6.17)

$$G_k = F_0 \frac{(p_k - z_1) \dots (p_k - z_m)}{(p_k - p_1) \dots (p_k - p_{k-1})(p_k - p_{k+1}) \dots (p_k - p_n)}.$$

Отже, для визначення ІХ потрібно, крім константи F_0 , знати нулі та полюси СФ. Аналогічно знаходять оригінал ПХ. Відмінність полягає лише в тому, що зображення $H(p)$ має ще полюс $p_0 = 0$. З урахуванням цього одержимо

$$h(t) = H_0 \cdot 1(t) + \sum_{k=1}^n H_k e^{p_k t} \cdot 1(t),$$

де

$$H_0 = F_0 \frac{(-z_1) \dots (-z_m)}{(-p_1) \dots (-p_n)},$$

$$H_k = F_0 \frac{(p_k - z_1) \dots (p_k - z_m)}{p_k (p_k - p_1) \dots (p_k - p_{k-1})(p_k - p_{k+1}) \dots (p_k - p_n)}.$$

Приклад 6.10. Вирахувати та побудувати часові характеристики коефіцієнта передачі напруги схеми (див. рис. 6.10), в якій $L_1 = L_2 = 10 \text{ мГн}$, $R_1 = R_2 = 100 \text{ Ом}$.

Розв'язання. Коефіцієнт передачі напруги було знайдено у прикл. 6.5. Беручи $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ та $j\omega = p$, можемо записати $K_U(p) = \frac{1}{\tau^2 p^2 + 3\tau p + 1}$. Знаходимо зображення ПХ:

$$H_U(p) = \frac{K_U(p)}{p} = \frac{1}{\tau^2 p(p-p_1)(p-p_2)}, \quad (6.52)$$

де $p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2\tau}$. При $\tau = 10^{-4} \text{ с}$ $p_1 = -0,38 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $p_2 = -2,62 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$. Застосувавши до (7.30) теорему розкладання, одержуємо оригінал ПХ:

$$h_U(t) = (A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t) \quad \text{де} \quad A_0 = \frac{1}{\tau^2 p_1 p_2} = 1, \quad A_1 = \frac{1}{\tau^2 p_1 (p_1 - p_2)} = -1,17,$$

$$A_2 = \frac{1}{\tau^2 p_2 (p_2 - p_1)} = 0,17. \quad \text{Отже,}$$

$$h_U(t) = (1 - 1,17 e^{-0,38 \cdot 10^4 t} + 0,17 e^{-2,62 \cdot 10^4 t}) \cdot 1(t). \quad (6.53)$$

Застосувавши до зображення IX $G_U(p) = K_U(p) = \frac{1}{\tau^2 (p-p_1)(p-p_2)}$ теорему розкладання, отримуємо оригінал $g_U(t) = (B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}) \cdot 1(t)$,

$$\text{де} \quad B_1 = \frac{1}{\tau^2 (p_1 - p_2)} = 0,45 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}, \quad B_2 = \frac{1}{\tau^2 (p_2 - p_1)} = -B_1.$$

Отже,

$$g_U(t) = 0,45 \cdot 10^4 (e^{-0,38 \cdot 10^4 t} - e^{-2,62 \cdot 10^4 t}) \cdot 1(t). \quad (6.54)$$

Вираз (6.54) можна також отримати з (6.53) згідно з (6.49) шляхом диференціювання. Розрахунки за формулами (5.53) і (5.54) можна спростити, вводячи зведений час $\theta = t/a$ або $t = a\theta$. Покладаючи $a = 10^{-4}$, одержуємо $h_U(\theta) = (1 - 1,17 e^{-0,38\theta} + 0,17 e^{-2,62\theta}) \cdot 1(t)$, $g_U(\theta) = 0,45 \cdot 10^4 (e^{-0,38\theta} - e^{-2,62\theta}) \cdot 1(t)$. На рис. 6.59 показано часові характеристики, розраховані за виразами (6.53)–(6.54).

КМ 6.4. Виконати завдання 1, 2 з підрозділу 6.5.3.

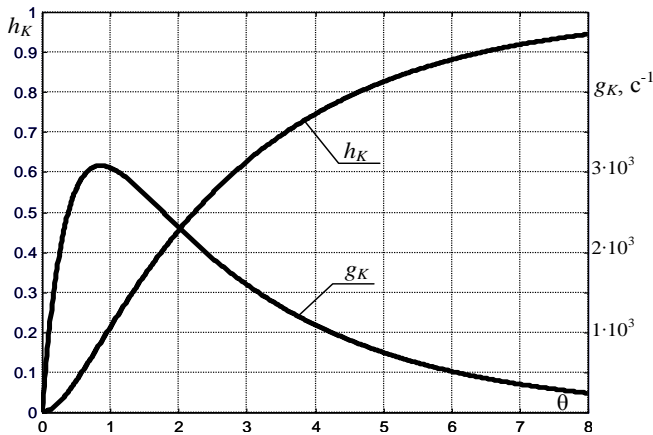


Рис. 6.59

6.7.2. Метод інтегралів згортки

У частотному методі складні коливання розкладаються на більш прості гармонічні коливання, що називаються стандартними. Можна показати, що в операторному методі стандартне коливання має вигляд $e^{\sigma t} \cos(\omega t - \varphi)$. Як стандартні коливання можна використовувати також ступеневе коливання та δ -імпульс. На рис. 6.60, а показано, як складне коливання $x(t)$ можна приблизно представити сумою ступеневих доданків $x(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x'_k(\theta) \Delta\theta \cdot 1(t - \theta)$. Для отримання точного виразу $x(t)$ потрібно покласти $\Delta\theta \rightarrow 0$. Тоді $x(t) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x'_k(\theta) \Delta\theta \cdot 1(t - \theta)$. На рис. 6.60, в) показано доданок реакції $y_k(t)$ на елементарну дію $x_k(t)$ (див. рис. 6.60, б). Реакцію $y(t)$ на дію $x(t)$ можна приблизно виразити як $y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(t - \theta) x'_k(\theta) \Delta\theta \cdot 1(t - \theta)$. При $\Delta\theta \rightarrow 0$ одержуємо

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x'(\theta) h(t - \theta) d\theta. \quad (6.55)$$

Вираз (6.55) є згортою $x'(t)$ та $h(t)$. Якщо дія має вигляд $x(t) \cdot 1(t - t_0)$, тобто починається в момент t_0 , то її похідна дорівнює $x'(t) \cdot 1(t - t_0) + x(t) \cdot \delta(t - t_0)$. Підставивши це у (6.55), отримуємо

$$y(t) = x(t_0)h(t - t_0) + \int_{t_0}^t x'(\theta)h(t - \theta)d\theta.$$

Рис. 6.54 ілюструє представлення коливання $x(t)$ сумою елементарних імпульсів. Шляхом аналогічних міркувань можна одержати такі інтеграли згортки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta)g(t - \theta)d\theta, \quad y(t) = \int_{t_0}^t x(\theta)g(t - \theta)d\theta. \quad (6.56)$$

Останній вираз застосовується, коли дія має вигляд $x(t) \cdot 1(t - t_0)$.

Приклад 6.11. На подільник напруги (див. рис. 6.62, а), подається експоненціальний імпульс $u_1(t) = U_m e^{-at} \cdot 1(t)$. Знайти напругу на виході, якщо $U_m = 7\text{В}$, $a = 10^5 \text{с}^{-1}$, $R_1 = 100 \text{кОм}$, $R_2 = 20 \text{кОм}$, $C_0 = 2 \text{нФ}$.

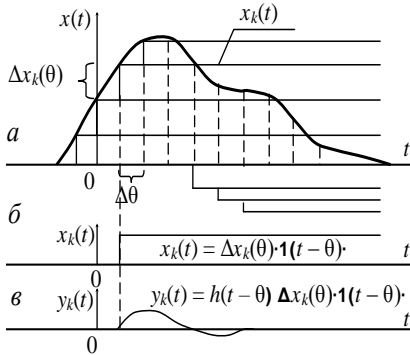


Рис. 6.60

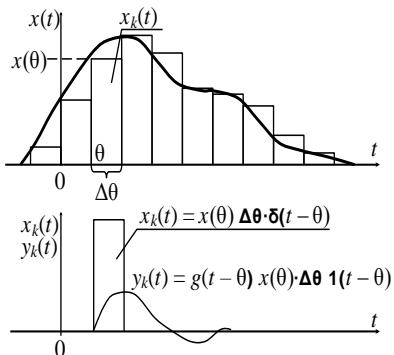


Рис. 6.61

Розв'язання. Розраховуємо операторний коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\tau_e(p + 1/\tau_e)}, \quad \text{де } Z_1(p) = R_1, \quad Z_2(p) = \frac{R_2}{C_0 R_2 p + 1},$$

$$\tau_e = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Знаходимо зображення й оригінали часових характеристик:

$$H_U(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p(p + 1/\tau_e)} \xleftarrow{L} h_U(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau_e}) \cdot 1(t),$$

$$G_U(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{p(p + 1/\tau_e)} \xleftarrow{L} g_U(t) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)\tau_e} \cdot e^{-t/\tau_e} \cdot 1(t). \quad (6.57)$$

За умовами задачі

$$x(t) = u_1(t) = U_m e^{-at} \cdot 1(t), \quad x'(t) = u_1'(t) = -aU_m e^{-at} \cdot 1(t) + U_m \delta(t). \quad (6.58)$$

Оскільки $g_U(t)$ та $u_1(t)$ простіші, ніж $h_U(t)$ та $u_1'(t)$, із двох інтегралів (6.55), (6.56) вибираємо другий й підставляємо в нього (6.57) і (6.58):

$$u_2(t) = \int_0^t U_m e^{-a\theta} \cdot \frac{R_2}{\tau_e(R_1 + R_2)} \cdot e^{-\frac{t-\theta}{\tau_e}} d\theta = \frac{U_m R_2}{(R_1 + R_2)(1 - a\tau_e)} \cdot (e^{-at} - e^{-\frac{t}{\tau_e}}) \cdot 1(t).$$

Осцилограми напруг u_1 і u_2 наведено на рис. 6.62.

КМ 6.5. Виконати завдання 3 з підрозділу 6.5.3.

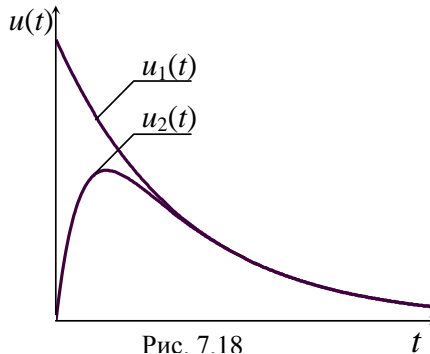


Рис. 7.18

Рис. 6.62

Приклад 6.12. У колі (рис. 6.63) визначити $u_{\text{ВХ}}(t)$ та часові характеристики коефіцієнта передачі за напругою, побудувати їх. Вхідна напруга тривалістю $\tau_{\text{ІМП}} = 6$ мкс, амплітудою $E = 2$ В. Опори в кОм, ємності в нФ, напруга в В.

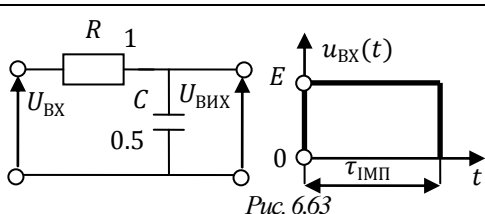


Рис. 6.63

Розв'язання

За формулою дільника напруги

$$U_{\text{ВХ}} = \frac{U_{\text{ВХ}} \cdot 1/pC}{R + 1/pC} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{1 + pRC} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{1 + 0.5p} = \frac{2U_{\text{ВХ}}}{2 + p}.$$

Операторний коефіцієнт передачі за напругою

$$K(p) = \frac{U_{\text{ВХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = \frac{2}{2 + p}.$$

Часові характеристики (рис. 6.64)

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{2 + p}\right\} = 2e^{-2t}.$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{K(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(2 + p)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2 + p - p}{(2 + p)p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 2}\right\} = 1 - e^{-2t}.$$

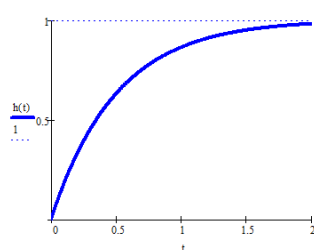
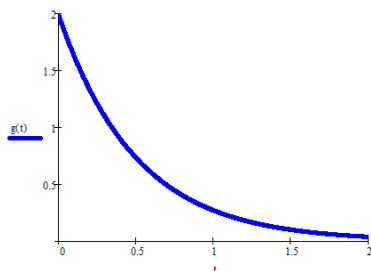


Рис. 6.64

Прямокутний сигнал напруги можна одержати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда (рис. 6.65 а).

$$u_{\text{ВХ}}(t) = E[1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМП}})].$$

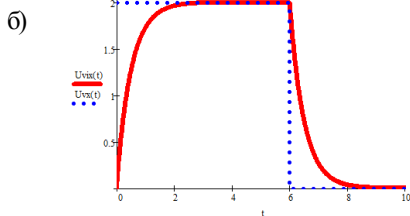
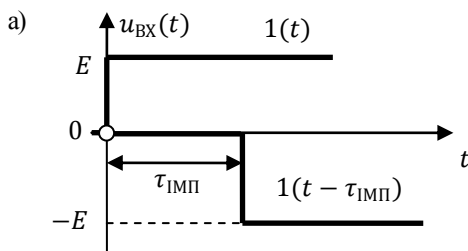


Рис. 6.65

Напруга на виході (рис. 6.65 б)

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = E[h(t) \cdot 1(t) - h(t - 6) \cdot 1(t - 6)] \text{ В.}$$

Відповідь: $g(t) = 2e^{-2t}$; $h(t) = 1 - e^{-2t}$;

$$u_{\text{ВИХ}}(t) = h(t) \cdot 1(t) - h(t - 6) \cdot 1(t - 6) \text{ В.}$$

Приклад 6.13. У колі (рис. 6.66) визначити $i_{\text{ВИХ}}(t)$ та часові характеристики коефіцієнта передачі за струмом. Побудувати їх графіки. Вхідний струм має тривалість $\tau_{\text{ІМП}} = 4$ мкс та амплітуду $I = 3$ мА. Числові значення: опори в кОм, індуктивність в мГн, струм в мА.

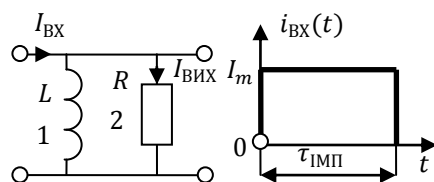


Рис. 6.66

Розв'язання

За формулою дільника струму

$$I_{\text{ВИХ}} = \frac{I_{\text{ВХ}} \cdot pL}{R + pL}.$$

Операторний коефіцієнт передачі за струмом

$$K_I(p) = \frac{I_{\text{ВИХ}}}{I_{\text{ВХ}}} = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{2 + p}.$$

Часові характеристики (рис. 6.67)

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\{K_I(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p}{p+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{p+2-2}{p+2}\right\} = L^{-1}\left\{1 - \frac{2}{p+2}\right\} = \\ &= \delta(t) - e^{-2t}; \end{aligned}$$

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K_I(p)}{p} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{2}{2+p} \right\} = 2e^{-2t}.$$

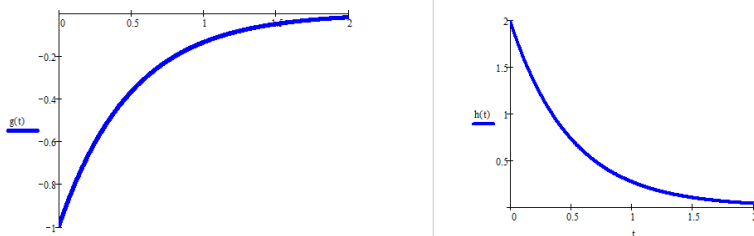
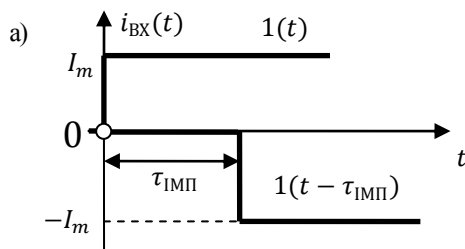


Рис. 6.67

Струм прямокутної форми можна одержати у вигляді різниці двох функцій Хевісайда (рис. 6.68 а).

$$I_{\text{ВХ}}(t) = I_m [1(t) - 1(t - \tau_{\text{ІМП}})].$$



б)

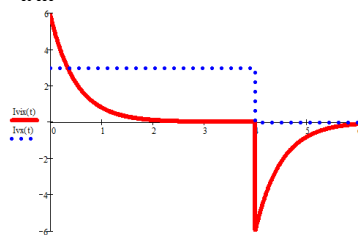


Рисунок 6.68

Струм на виході (рис. 6.68 б)

$$I_{\text{ВІХ}}(t) = I_m [h(t) \cdot 1(t) - h(t - 4) \cdot 1(t - 4)] \text{ мА.}$$

Побудуємо всі три напруги на одному графіку (рис. 6.68).

Відповідь: $g(t) = \delta(t) - e^{-2t}$; $h(t) = 2e^{-2t}$;

$$i_{\text{ВІХ}}(t) = 3h(t) \cdot 1(t) - 3h(t - 4) \cdot 1(t - 4) \text{ мА.}$$

6.8. Комп'ютерне моделювання

6.8.1. Процеси в лінійних інерційних колах

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- вільних і примушених процесів у лінійних інерційних колах;
- перехідних процесів у лінійних інерційних колах;
- залежність характеру і тривалості перехідних процесів від параметрів електричного кола;
- методики вимірювання параметрів електричного кола за осцилограмами перехідних процесів.

1. Дослідити перехідні процеси в RL-колі (див. рис. 6.67). У цій схемі реле Р підмикає RL-коло до джерела постійної напруги E_1 , після чого у колі виникає примушений процес. Потім реле замикає RL-коло і в колі протікає вільний процес. Реле перемикається напругою від джерела E_2 . Джерело напруги, кероване струмом Т, перетворює коливання струму в RL-колі на пропорційне коливання напруги, яке через перемикач S подається на вхід каналу В осцилографа. На канал В через перемикач S можна подати також коливання напруги на індуктивності. На вхід каналу А подається вхідна напруга RL-кола.

Зняти осцилограми вхідної напруги, напруги на індуктивності і струму, встановивши опір $R = 10 \text{ Ом}$ і індуктивність $L = 100, 50, 20 \text{ мГн}$. Порівняти отримані осцилограми з графіками (див. рис. 6.2 і 6.3). Дослідити, як змінюються перехідні процеси при зміні параметрів RL-кола.

Зауваження: *при перемиканні ключа S необхідно налаштовувати чутливість каналу В так, щоб отримати оптимальний розмір осцилограми на екрані осцилографа.*

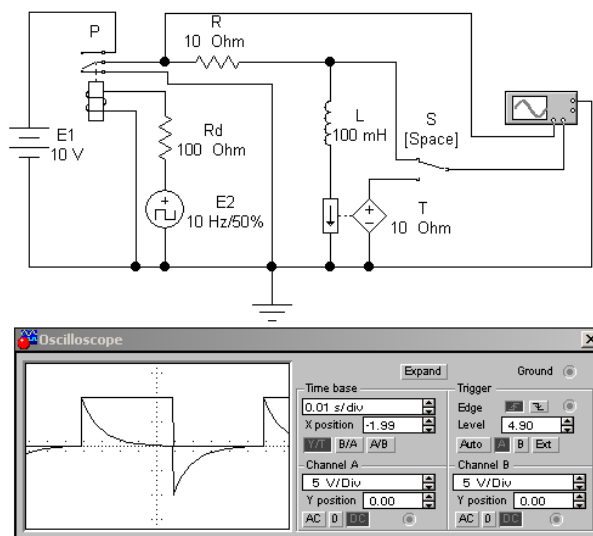


Рис. 6.67

Розрахувати сталу часу при заданих параметрах RL-кола за формулою $\tau_L = L/R$. Виміряти величину сталої часу за осцилограмами, перемкнувши осцилограф у розгорнуте зображення, за відповідною методикою. Сталу часу визначити як час ($T_2 - T_1$), за який напруга на індуктивності зменшиться до 0,37 початкової величини, (рис. 6.68). Порівняти виміряні величини сталої часу з розрахованими.

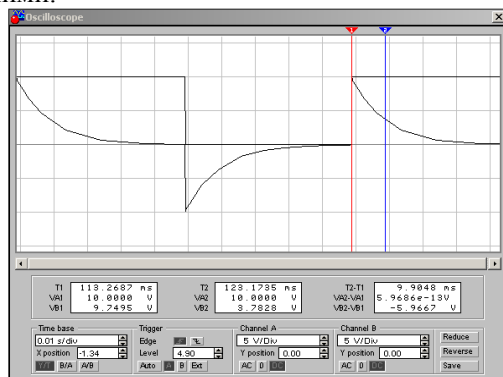


Рис. 6.68

2. Дослідити перехідні процеси в RC-колі (див. рис. 6.69). Схема цього кола аналогічна схемі на рис. 6.56 і відрізняється лиш тим, що індуктивність L замінена на ємність C . Зняти осцилограми вхідної напруги, напруги на ємності і струму, встановивши опір $R = 10 \text{ кОм}$ і ємність $C = 1,0; 0,5; 0,2 \text{ мкФ}$. Порівняти отримані осцилограми з графіками (див. рис. 6.67). Дослідити, як змінюються перехідні процеси при зміні параметрів RC-кола. Розрахувати сталу часу при заданих параметрах RC-кола за формулою $\tau_c = RC$. Виміряти величину сталої часу за осцилограмами, перемкнувши осцилограф у розгорнуте зображення. Сталу часу визначити як час $(T_2 - T_1)$, за який струм зменшиться до 0,37 початкової величини. Порівняти виміряні величини сталої часу з розрахованими.

3. Дослідити перехідні процеси в RLC-колі (див. рис. 6.69). Зняти осцилограми вхідної напруги, напруги на ємності і струму, встановивши такі параметри:

а) $L = 1 \text{ Гн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $R = 200 \text{ Ом}$, 500 Ом , 1 кОм , 2 кОм ;

б) $R = 200 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Гн}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$, 1 мкФ , 2 мкФ ;

в) $R = 200 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $L = 0,5 \text{ Гн}$, 1 Гн , 2 Гн .

Пояснити отримані осцилограми та їх залежність від параметрів схеми, аналізуючи формули (4.8) і (4.9).

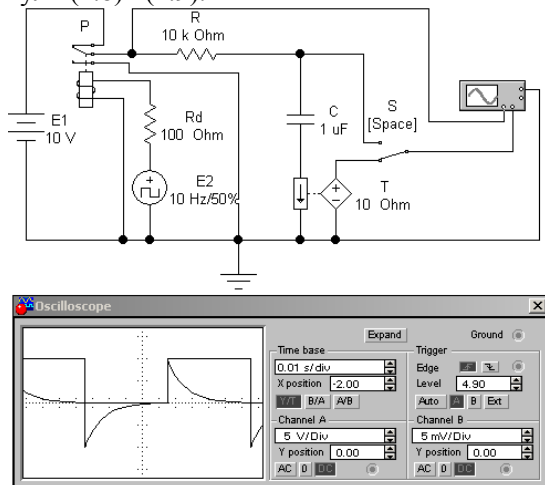


Рис. 6.69

6.8.2. Якісний аналіз процесів у лінійних інерційних колах

1. Застосувати методику якісного аналізу перехідних процесів до схеми, зображеної на рис. 6.70. У цій схемі перехідні процеси виникають при замиканні і розмиканні контактів реле Р, яке керується напругою джерела Е2. Зняти осцилограми напруг у вузлах а та b, а також струму. Осцилограма струму отримується за допомогою перетворювача струм-напруга Е3. За допомогою осцилографа в розширеному зображенні виміряти початкові й усталені величини напруг і струму. За величинами параметрів схеми, зображеної на рис. 6.71, розрахувати початкові й усталені величини напруг і струму і порівняти їх із виміряними експериментально. При цих розрахунках застосувати закони неперервності.

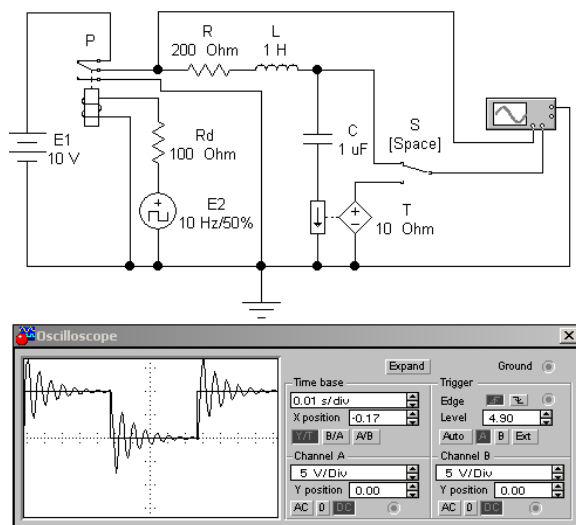


Рис. 6.70

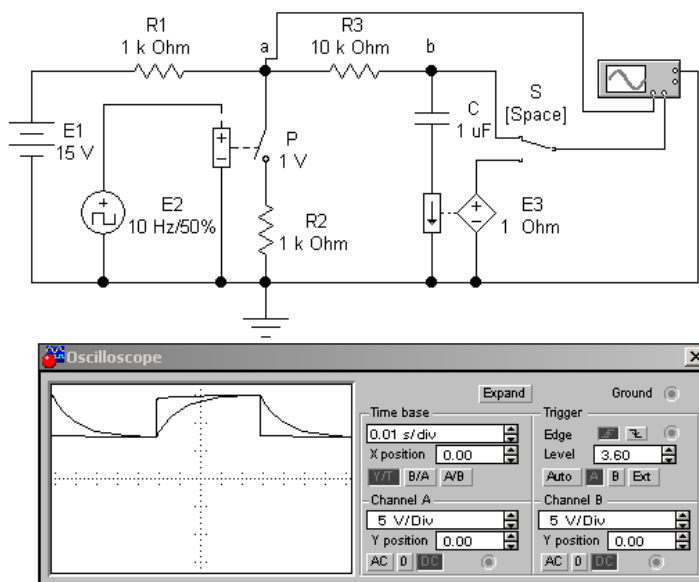


Рис. 6.71

6.8.3. Інтегрувальні та диференціальні кола

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- елементарних RC- і RL-ланцюжків як інтегруючих і диференціюючих кіл;
- впливу величини параметрів RC- і RL-ланцюжків на якість інтегрування і диференціювання.

1. Скласти схему, зображену на рис. 6.72. Перемикачем S1 ввімкнути ємність C1 20 нФ, утворивши з опором R1 1 кОм диференціюючий RC-ланцюжок. Подати від генератора пилоподібну напругу з амплітудою 1 В і частотою 1 кГц. Спостерігати на осцилографі і зарисувати осцилограми вхідної і вихідної напруг. Пояснити форму вихідної напруги. Розрахувати постійну часу RC-ланцюжка і порівняти її з періодом вхідної напруги. Збільшити ємність до 200 нФ, збільшивши тим самим постійну часу в 10 разів. Спостерігати і зарисувати осцилограму вихідної напруги. Пояснити зміну форми вихідного сигналу і зробити ви-

своє щодо якості процесу диференціювання залежно від параметрів схеми.

Подати від генератора прямокутні імпульси напруги з амплітудою 1 В і частотою 1 кГц. Зняти осцилограми вихідної напруги при таких значеннях ємності: 2 нФ, 20 нФ, 200 нФ. Пояснити отримані результати і сформулювати вимоги щодо параметрів RC-ланцюжка з метою отримання режиму диференціювання прямокутних імпульсів.

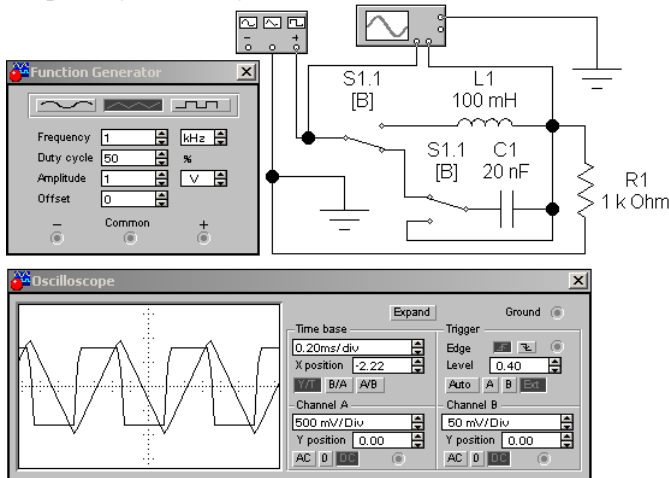


Рис. 6.72

2. Перемикачем S1 включити індуктивність L1100 мГн, утворивши з опором R11 кОм інтегруючий LR-ланцюжок. Подати від генератора прямокутні імпульси напруги з амплітудою 1 В і частотою 1 кГц. Спостерігати на осцилографі і зарисувати осцилограми вхідної і вихідної напруг. Пояснити форму вихідної напруги. Розрахувати постійну часу LR-ланцюжка і порівняти її з періодом вхідної напруги. Зменшити опір до 100 Ом, збільшивши тим самим постійну часу в 10 разів. Спостерігати і зарисувати осцилограму вихідної напруги. Пояснити зміну форми вихідного сигналу і зробити висновок щодо якості процесу інтегрування залежно від параметрів схеми.

6.8.4. Проходження імпульсних коливань у лінійних колах

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- проходження імпульсних сигналів через елементарні RC - і RL -кола;
- впливу величини параметрів кола на спотворення сигналів;
- методики вимірювання параметрів сигналів, які характеризують спотворення сигналів при проходженні через лінійні інерційні кола;
- спотворення сигналів при проходженні через LC - кола.

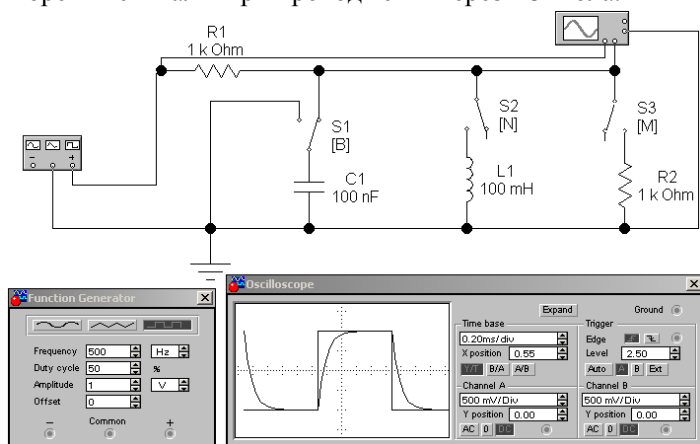


Рис. 6.73

1. Дослідити проходження прямокутних імпульсів напруги через елементарні RC -, RL - і RR -кола, склавши схему, зображену на рис. 6.73. Встановити на генераторі режим генерування прямокутних імпульсів з амплітудою 1 В і частотою 500 Гц.

Перемикачами S1, S2, S3 по черзі підімкнути елементи C1, L1, R2. Спостерігати і зарисувати вхідні та вихідні імпульси, включивши розгорнуту версію осцилографа (див. рис. 6.74). За осцилограмою вихідного імпульсу визначити сталу часу RC -ланцюжка. Для цього встановити курсор першого каналу (вертикальна червона лінія з трикутником зверху, що містить цифру 1), розмістити на початок імпульсу, а курсор другого каналу (вертикальна синя лінія з трикутником зверху, що містить цифру 2) розмістити на фронті вихідного імпульсу в точці, в якій вихідна напруга досягає рівня 0,63 від амплітудного значення 1 В, тобто 0,63 В. Визначити час, за який вихідна напруга

досягає цього рівня від початку імпульсу (див. праве табло під екраном осцилографа T2–T1).

Дослідити, як змінюється форма вихідного імпульсу при збільшенні та зменшенні вдвічі значення ємності й індуктивності, знявши осцилограми вихідних імпульсів і зобразивши їх на одному графіку. Розрахувати сталу часу RC-ланцюжка за формулою

$$\tau = RC.$$

Порівняти розраховане значення сталої часу з часом T2 – T1.

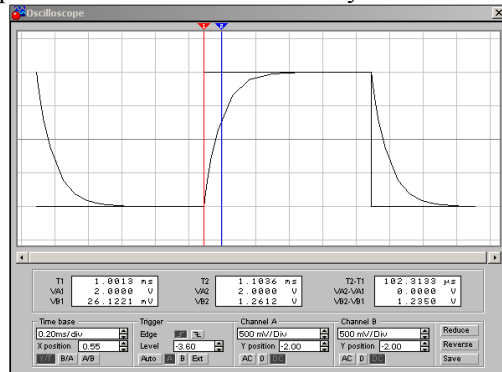


Рис. 6.74

2. Дослідити проходження прямокутних імпульсів напруги через елементарні CR- і LR-кола, склавши схему, зображену на рис. 6.75.

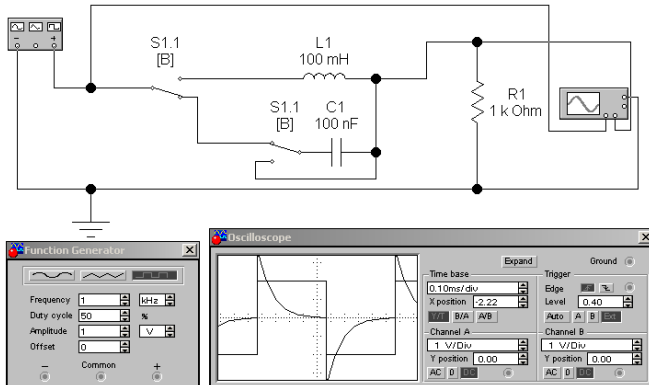


Рис. 6.75

Перемикачем S1 по черзі підключити елементи C1, L1. Спостерігати і зарисувати осцилограми вхідного і вихідного імпульсів. За осцилограмою вихідного імпульсу RL-ланцюжка визначити його сталу часу. Розрахувати сталу часу за формулою

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

Порівняти розраховане і вимірне значення сталої часу.

Дослідити, як змінюється форма вихідного імпульсу при збільшенні та зменшенні вдвічі значення ємності й індуктивності, знявши осцилограми вихідних імпульсів і зобразивши їх на одному графіку.

3. Дослідити проходження прямокутних імпульсів напруги через резонансний контур L1, C1, склавши схему, зображену на рис. 6.76. Перемикачем S1 почергово підімкнути опір R2 і резонансний контур L1, C1. Спостерігати і зарисувати осцилограми вхідної та вихідної напруг. Пояснити отримані результати.

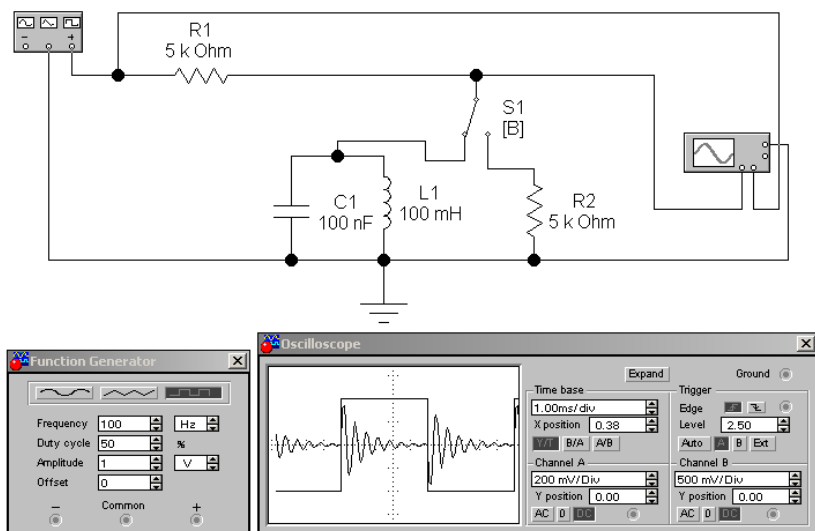


Рис. 6.76

4. Дослідити проходження прямокутного імпульсу напруги через коло з розділовим конденсатором (див. рис. 6.77). Зняти осцилограму вихідного імпульсу і заміряти сколювання і тривалість фронту. Ці виміри виконати при розгорнутому зображенні осцилографа (див. рис. 6.73).

Збільшити, а потім зменшити ємність роздільного конденсатора C1 удвічі. Зарисувати, як зміниться при цьому форма вихідного сигналу, пояснити отриманий результат.

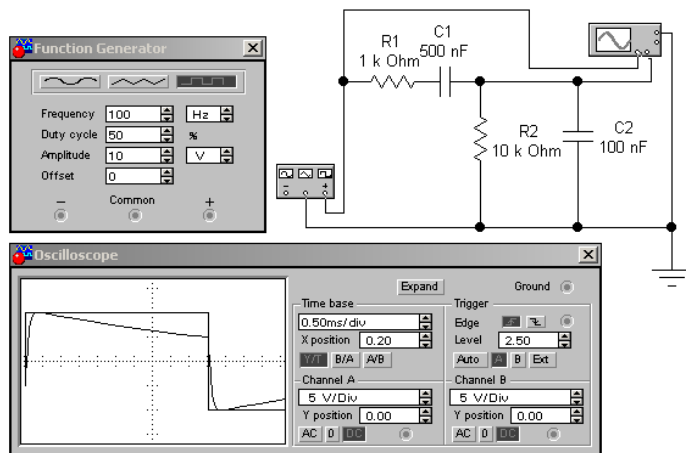


Рис. 6.77

Дослідити, як змінюється форма вихідного сигналу від значення ємності C2. Для цього зняти осцилограму вихідного сигналу при збільшенні та зменшенні вдвічі значення цієї ємності.

6.8.5. Часові характеристики

Метою комп'ютерного моделювання є дослідження:

- перехідних характеристик RC- і RL-ланцюжків, що є релаксаційними колами, і резонансних кіл;
- залежності перехідних характеристик від параметрів схем.

1. Перехідною характеристикою є реакція кола на дію у вигляді ступеневої функції, поділена на величину ступеневої дії. Як таку в експерименті можна використати передній фронт прямокутного імпульсу. Для дослідження перехідних характеристик RC- і RL-ланцюжків потрібно у схемах, зображених на рис. 6.72 і 6.73, подати від генератора прямокутні імпульси напруги з амплітудою 1 В і підібрати таку тривалість цих імпульсів, що перевищує тривалість перехідної характеристики (див. рис. 6.78). Спостерігати на осцилографі і зарисувати перехідні характеристики релаксаційних кіл, якими є RC- і RL-ланцюжки.

Збільшивши і зменшивши вдвічі параметри досліджуваних кіл, дослідити, як змінюється перехідна характеристика.

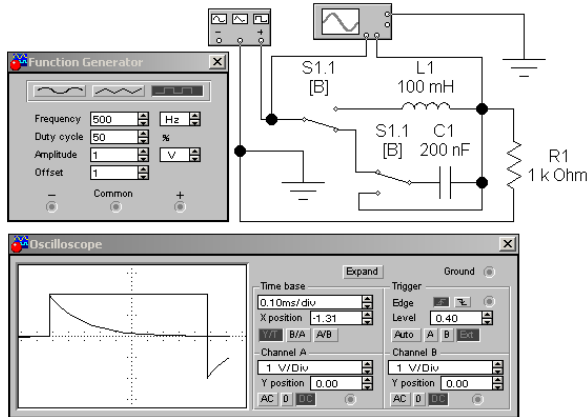


Рис. 6.78

2. Дослідити перехідні характеристики коефіцієнтів передачі напруги і передавальної провідності резонансного контура, склавши схему, зображену на рис. 6.79. Зняти осцилограми вихідної напруги (перемикач S у верхньому положенні) і струму (перемикач S у нижньому положенні). Перехідною ха-

ктеристикою коефіцієнта передачі напруги є відношення вихідної напруги до величини стрибка вхідної напруги, а перехідною характеристикою передавальної провідності є відношення вихідного струму до величини стрибка вхідної напруги.

Дослідити залежність перехідних характеристик від параметрів резонансного контура, встановивши такі параметри:

а) $L = 100 \text{ мГн}$, $C = 200 \text{ нФ}$, $R = 20 \text{ Ом}$, 100 Ом , 500 Ом ;

б) $R = 20 \text{ Ом}$, $L = 100 \text{ мГн}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$, 1 мкФ , 2 мкФ ;

в) $R = 50 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $L = 20 \text{ мГн}$, 100 мГн , 500 мГн .

3. Змоделювати проходження експоненціального імпульсу в схемі, зображений на рис. 6.13, а, проаналізованого у прикладі 6.8. Для цього скласти схему, зображену на рис. 6.70, в якій ланка C, R формує експоненціальний імпульс із прямокутного імпульсу, що надходить від генератора. Елементи схеми C_0, R_1, R_2 моделюють подільник напруги (див. рис. 6.13, а). Задати величини цих елементів, як зазначено на схемі, зображений на рис. 6.80.

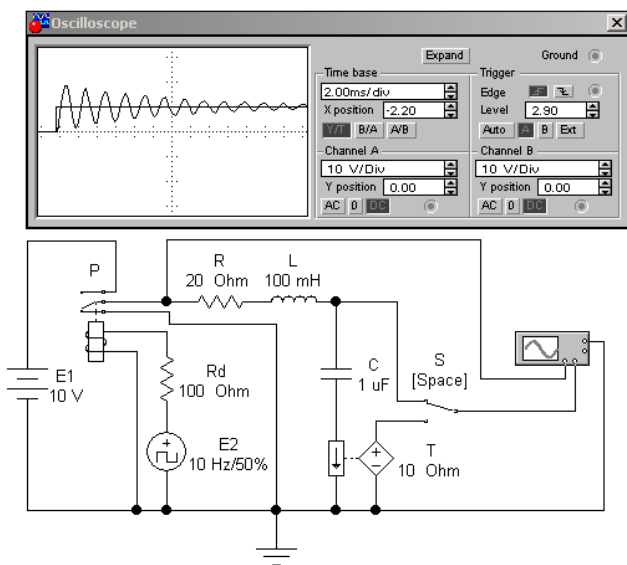


Рис. 6.79

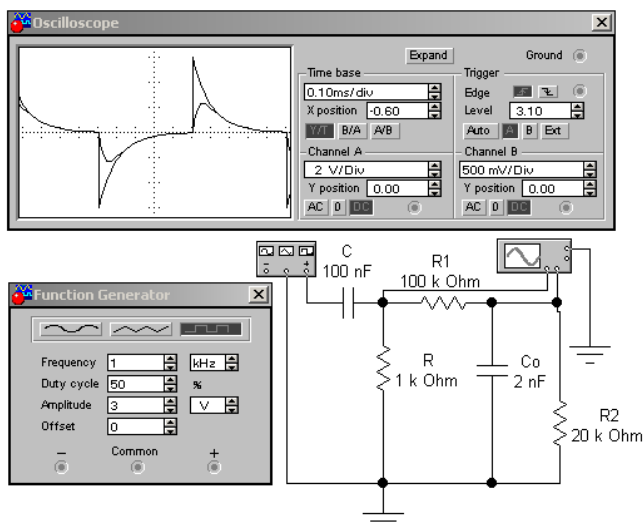


Рис. 6.80

Зняти осцилограму вихідної напруги з осцилографа, поданого у розгорнутому вигляді. Розрахувати вихідну напругу за формулою

$$u_2(t) = \frac{U_m R_2}{(R_1 + R_2)(1 - a\tau_e)} \cdot (e^{-at} - e^{-\frac{t}{\tau_e}}) \cdot 1(t).$$

Порівняти розраховану і зняту осцилограми вихідної напруги. Значення показника експоненти можна визначити за знятою осцилограмою як $a = 1/\tau$, де τ дорівнює часу, за який величина експоненціального імпульсу зменшується до рівня 0,37 від амплітуди.

6.9. Стійкість електричних кіл

Під стійкістю розуміють здатність підтримувати стан рівноваги або режим усталених коливань. Якщо коло під дією будь-яких чинників виводиться з рівноваги і в подальшому процесі повертається до первинного стану, таке коло *стійке*. Дослідження стійкості є обов'язковою умовою вивчення електричних кіл.

Режим рівноваги є нестійким, якщо за будь-якого малого збурення коло не повертається до попереднього стану рівноваги. У лінійних схемах вільні складові коливань описуються виразом (6.2), де показники експонент є коренями характеристичного рівняння і можуть бути дійсними чи комплексними. У разі дійсного кореня $p_k = \sigma_k$ відповідна експонента у (6.2) має вигляд, показаний на рис. 6.81, а. Якщо маємо комплексний корінь $p_k = \sigma_k + j\omega_k$, то є й спряжений корінь $p_{k+1} = \sigma_k - j\omega_k$. Цим кореням відповідає сума експонент

$$\begin{aligned} & \underline{A}_k \exp(p_k t) + \underline{A}_{k+1} \exp(p_{k+1} t) = \\ & = A_k e^{j\varphi_k} \exp(\sigma_k + j\omega_k)t + A_k e^{-j\varphi_k} \exp(\sigma_k - j\omega_k)t = \\ & = A_k e^{\sigma_k t} \left(e^{j(\omega_k t + \varphi_k)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi_k)} \right) = 2A_k e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k). \end{aligned} \quad (6.59)$$

На рис. 6.81, б, в показано осцилограми коливань (6.59) при різних значеннях σ_k . Отже, за будь-якого $|A_k| > 0$ і $\sigma_k > 0$ коливання наростають у часі, тобто стан рівноваги не є стійким. Якщо ж $\sigma_k < 0$, коливання вгамовуються, і коло повертається до рівноваги. Таким чином, *необхідною та достатньою умовою стійкості рівноваги* є від'ємність дійсних коренів та дійсних частин комплексних коренів характеристичного рівняння. Якщо ці корені зобразити точками на комплексній площині, то вони у стійкого кола розташуються у лівій половині комплексної площини.

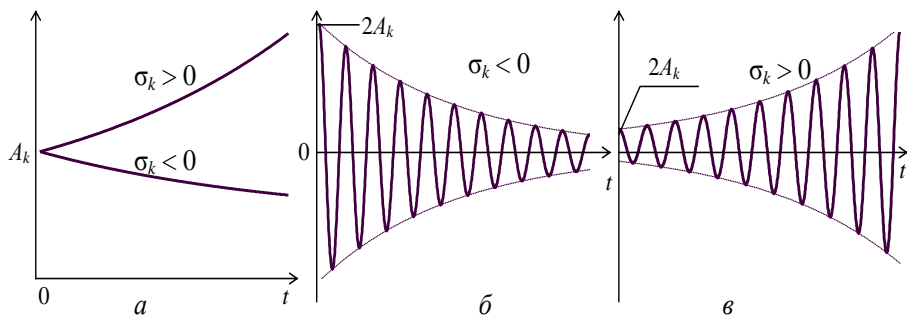


Рис. 6.81

6.10. Підсумки і самоконтроль

Головним завданням цієї глави є вивчення процесів у лінійних інерційних колах і режимів вільних, примушених і перехідних коливань, набуття навичок складання та розв'язування диференціальних рівнянь означених кіл, а також якісного аналізу процесів, що досліджуються.

Введено такі нові поняття: вільні, примушені та перехідні процеси, змінні стану, стала часу. Аналогічний матеріал викладено в літературі [2, гл. 4], [3, гл. 8], [6, гл. 5], [8, гл. 9], [11, гл. 4], [12, гл. 4].

Наводимо контрольні запитання і завдання до четвертого розділу:

- Які процеси називаються вільними, примушеними, перехідними?
- Із яких елементів складаються схеми інерційних лінійних кіл і якими рівняннями вони описуються?
- Які початкові умови називаються незалежними і залежними?
- Що таке змінні стану?
- Складіть рівняння для аналізу вільних і примушених процесів в RC - та RL -ланцюжках і знайдіть їх розв'язок. Побудуйте осцилограми струмів і напруг у цих процесах. Як змінюються ці струми і напруги при зміні параметрів ланцюжків?
- Чому дорівнює стала часу RC - та RL -ланцюжків?
- Як визначається стала часу за осцилограмою?

- Складіть рівняння для аналізу вільних та примушених процесів в RCL -контурі і знайдіть їх розв'язок. Побудуйте осцилограми струмів і напруг в цих процесах. Як змінюються ці струми і напруги при зміні параметрів контуру?
- Чим визначається порядок диференціального рівняння схеми?
- На яких міркуваннях ґрунтується якісний метод аналізу процесів у лінійних колах?
- Проаналізуйте якісно процеси в RC - та RL -ланцюжках.

У цьому розділі розглянуто режими неперіодичних коливань у лінійних колах. Значна увага приділена математичному опису сигналів, часовим і частотним моделям, операторним зображенням. Вивчаються частотний і операторний методи, а також метод інтегралів згортки — найбільш загальні методи аналізу лінійних кіл. Володіння цими методами є основою грамотності інженера. Введено такі нові поняття: ступенева та імпульсна функції, спектральна характеристика, пропускна здатність каналу зв'язку, операторне зображення сигналу, диференціююче та інтегруюче кола, операторні опір і провідність, операторна схема, операторна схемна функція, часові перехідна та імпульсна характеристики. Відповідний матеріал викладено також у літературі [1, гл. 2, 8], [2, гл. 9, 10, 11], [3, гл. 9], [6, гл. 6, 10, 11], [8, гл. 10, 11, 12], [10, гл. 8], [11, гл. 11], [12, гл. 7].

Проконтролювати засвоєння викладеного вище матеріалу допоможуть наведені далі завдання і запитання.

- Сформулюйте означення ступеневої та імпульсної функцій. Як вони пов'язані між собою?
- Запишіть пряме й обернене перетворення Фур'є.
- Що таке спектральна характеристика? Який фізичний смисл має модуль спектральної характеристики?
- Поясніть смисл теореми про подібність, а також поняття пропускної здатності каналу зв'язку.
- Як пов'язані між собою спектри неперіодичного і періодичного коливань?
- Чому дорівнюють діюче значення і потужність періодичного струму?
- Чому дорівнює енергія неперіодичного струму?
- Що таке операторне зображення сигналу? Як воно пов'язано зі спектральною характеристикою?
- Сформулюйте умови неспотвореної передачі сигналу.

- Що таке диференціююче й інтегруюче кола? Які вони мають частотні характеристики?
- Які реальні кола і за яких умов вони можуть використовуватись як диференціюючі та інтегруючі?
- Запишіть закони Ома, Кірхгофа та елементні рівняння у комплексній і операторній формах.
- У чому полягають переваги символічного, спектрального й операторного методів аналізу і які сфери застосування цих методів?
- Запишіть операторні опори і провідності схемних елементів. Як вони пов'язані з комплексними опорами і провідностями?
- Як складаються операторні схеми і як ними користуватися?
- Що таке операторна схемна функція, часові характеристики — перехідна й імпульсна? Як вони визначаються через операторні схемні функції?
- Який фізичний смисл має метод інтегралів згортки?

РОЗДІЛ 7. КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

7.1. Рівняння і параметри довгих ліній

7.1.1. Телеграфні рівняння та їх розв'язання

Як показано в підрозділі 2.5.3, коло вважається розподіленим, якщо його розміри сумірні або перевищують довжину хвилі на робочих частотах. Розподілені кола часто мають вид двопровідних або ж коаксіальних ліній. Поздовжній розмір лінії задовольняє умову розподіленості, а поперечні розміри набагато менші за довжину хвилі. Тому такі лінії, що називають *довгими лініями*, відносять до *кіл з одновимірним розподілом*. Однорідність означає, що конструктивні й електричні параметри не змінюються вздовж лінії.

Розглянемо відрізок лінії (рис. 7.1). Спад напруги на ньому зумовлений опором ΔR та індуктивністю проводів ΔL . Струм Δi складається зі струму ємності ΔC і струму провідності витоку ΔG . Якщо $\Delta x \ll \lambda$, такий відрізок можна моделювати схемою заміщення (рис. 7.2), в якій $\Delta u = \Delta R i + \Delta L i'$, $\Delta i = \Delta G u + \Delta C u'$. Якщо параметри $\Delta R, \dots, \Delta C$ виразити через *погонні параметри лінії* як $\Delta R = R_1 \Delta x$, $\Delta C = C_1 \Delta x$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.1)$$

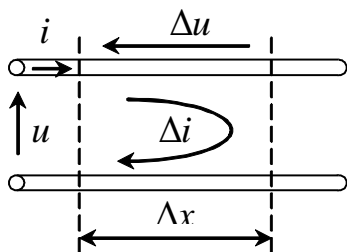


Рис. 7.1

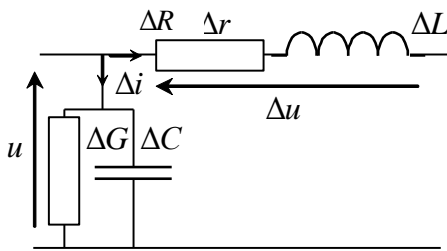


Рис. 7.2

Це — *телеграфні рівняння*, які визначають залежність між струмом і напругою в довгій лінії. Оскільки це рівняння у частинних похідних, їх розв'язок є функціями як часу, так й координати x , тобто вони описують *хвильові процеси* в лінії. У режимі усталених гармонічних коливань, замі-

нивши миттєві струми та напруги в (7.1) комплексними амплітудами, одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = \underline{Z}_1 \underline{I}, \quad \frac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Y}_1 \underline{U}, \quad (7.2)$$

де $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Y}_1 = G_1 + j\omega C_1$. Виключаючи по чергово \underline{U} та \underline{I} , зводимо рівняння (7.2) до такого вигляду:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U}, \quad \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{I}, \quad (7.3)$$

де $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1}$. Розв'язок лінійного однорідного рівняння (7.3) має такий вигляд:

$$\underline{U}(x) = \underline{A} e^{\underline{\gamma} x} + \underline{B} e^{-\underline{\gamma} x}, \quad \underline{I}(x) = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_0} e^{\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{B}}{\underline{Z}_0} e^{-\underline{\gamma} x}, \quad (7.4)$$

де $\underline{Z}_0 = \sqrt{\underline{Z}_1 / \underline{Y}_1}$, в чому можна впевнитися, підставивши (7.4) у (7.2) та (7.3). Сталі \underline{A} і \underline{B} знаходять із *граничних умов*, тобто за напругами та струмами на краях лінії. Умовимося через x позначати відстань у лінії від кінця (від навантаження), а через y — від початку (від генератора), причому $y = l - x$, де l — довжина лінії. Нехай в кінці лінії $x = 0$, $\underline{U} = \underline{U}_2$, $\underline{I} = \underline{I}_2$. Підставивши ці граничні умови у (7.4), одержимо $\underline{A} = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2}{2}$, $\underline{B} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_2}{2}$, а також

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma} x} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_2}{2} e^{-\underline{\gamma} x}, \quad \underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_2 + \underline{Z}_0 \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_0} e^{\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_2}{2 \underline{Z}_0} e^{-\underline{\gamma} x}. \quad (7.5)$$

Покладаючи у (8.5) $x = l - y$, $y = 0$, $\underline{U} = \underline{U}_1$, $\underline{I} = \underline{I}_1$, де $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ — напруга та струм на початку лінії, одержимо розв'язок для граничних умов на початку лінії:

$$\underline{U}(y) = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2} e^{-\underline{\gamma} x} + \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2} e^{\underline{\gamma} x}, \quad \underline{I}(y) = \frac{\underline{U}_1 + \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2 \underline{Z}_0} e^{-\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{U}_1 - \underline{Z}_0 \underline{I}_1}{2 \underline{Z}_0} e^{\underline{\gamma} x}. \quad (7.6)$$

7.1.2. Хвильовий опір, коефіцієнт поширення хвилі, фазова швидкість

Розглянемо фізичний зміст параметрів \underline{Z}_0 та $\underline{\gamma}$. Якщо $\underline{Z}_0 = \underline{U}_1 / \underline{I}_1$, то з (7.6) випливає

$$\underline{U}(y) = \underline{U}_1 e^{-\underline{\gamma} y}, \quad \underline{I}(y) = \underline{I}_1 e^{-\underline{\gamma} y}. \quad (7.7)$$

При цьому $\underline{U}(y) / \underline{I}(y) = \underline{U}_1 / \underline{I}_1 = \underline{Z}_0$ в будь-якій точці лінії, включаючи $y = l$, тобто на кінці лінії. Тоді $\underline{Z}_0 = \underline{U}_2 / \underline{I}_2 = \underline{Z}_H$. Отже, якщо лінія навантажена на опір \underline{Z}_H , що дорівнює \underline{Z}_0 , то відношення комплексних амплітуд напруги до струму в будь-якій точці лінії стало та дорівнює \underline{Z}_0 , що називається *хвильовим опором*. Покладаючи $\underline{\gamma} = \beta + j\alpha$ у (7.7), одержимо $\underline{U}(y) = U_1 e^{j\phi_{U1}} e^{-(\beta + j\alpha)y}$, $\underline{I}(y) = I_1 e^{j\phi_{I1}} e^{-(\beta + j\alpha)y}$. Цим комплексним амплітудам відповідають такі миттєві напруга та струм:

$$\begin{aligned} u(t, y) &= U_1 e^{-\beta y} \cos(\omega t + \phi_{U1} - \alpha y), \\ i(t, y) &= I_1 e^{-\beta y} \cos(\omega t + \phi_{I1} - \alpha y). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Одержані вирази описують біжні хвилі зі згасаючою за експонентою амплітудою. Щоб переконатись у цьому, побудуємо розподілення миттєвих напруг у лінії (рис. 7.3), для моментів: $t_1 = 0, t_2 = T/8, t_3 = 2T/8, t_4 = 3T/8$, для яких $\omega t_1 = 0, \omega t_2 = \pi/4, \omega t_3 = \pi/2, \omega t_4 = 3\pi/4$. Одержали немов миттєві знімки хвилі напруги, що біжить зліва направо. Такий самий вигляд має хвиля струму.

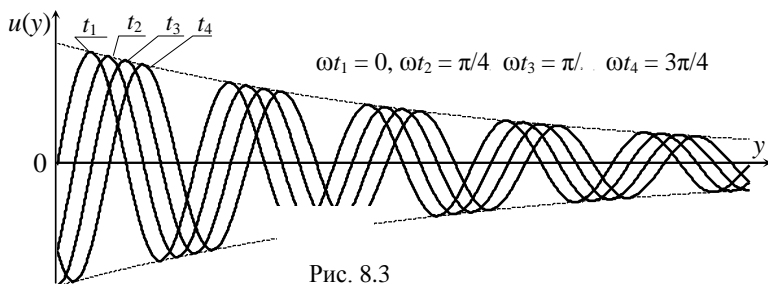


Рис. 8.3

Рис. 7.3

Із (7.8) видно, що дійсна β та уявна α частини коефіцієнта $\underline{\gamma}$ визначають ступінь згасання та набіг фази хвилі у лінії. Тому вони називаються відповідно *коефіцієнтами згасання та фази*, а $\underline{\gamma}$ — *коефіцієнтом поширення хвилі*. Відстань між двома однаковими фазами хвилі називають *довжиною хвилі* λ . Із (7.8) випливає, що $\alpha\lambda = 2\pi$, звідки

$$\lambda = 2\pi/\alpha.$$

Швидкість пересування точки хвилі зі сталою фазою називається *фазовою швидкістю*. Покладаючи у (7.8) фазу сталою, тобто $\omega t + \varphi_{u1} - \alpha y = \text{const}$ та диференціюючи у часі, одержимо

$$V_{\phi} = \omega/\alpha = \lambda/T. \quad (7.9)$$

Таким чином, параметр α визначає швидкість хвиль у лінії, а отже, і довжину хвилі. Згідно з (7.8) амплітуда хвилі згасає при поширенні в лінії як

$$U(y) = U_1 e^{-\beta y}. \quad (7.10)$$

Згасання хвиль подають у логарифмічних одиницях — *неперах*: $\delta_{\text{нп}} = \ln(U(y_2)/U(y_1))$. Із (7.10) знаходимо $\beta = \delta_{\text{нп}}/(y_2 - y_1)$. Отже, параметр β дорівнює згасанню у неперах на одиницю довжини лінії.

КМ 7.1. Виконати завдання з підрозділу 7.4.1.

7.1.3. Погонні параметри лінії

Згідно з (7.3) і (7.4), хвильовий опір та стала поширення

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}, \quad (7.11)$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Y}_1} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \quad (7.12)$$

залежать від погонних параметрів, котрі, своєю чергою, визначаються конструктивними параметрами лінії й електромагнітними параметрами середовища. Методами теорії електромагнітного поля одержано розрахункові формули для погонних параметрів, які наведено у табл. 8.1. Погонну провідність розраховують як $G_1 = \omega C_1 \text{tg}\beta$, де β — кут втрат. На практиці зазвичай

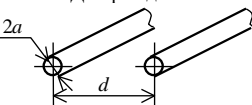
використовують лінії з малими втратами, коли $R_1 \ll \omega L_1$, $G_1 \ll \omega C_1$. Враховуючи це, формули (8.11) та (8.12) можна спростити, тобто

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \rho, \quad \underline{\gamma} \approx \left(\frac{R_1}{2\rho} + \frac{G_1\rho}{2} \right) + j\omega\sqrt{L_1 C_1},$$

звідки знаходимо:

$$\beta = \frac{R_1}{2\rho} + \frac{G_1\rho}{2}, \quad \alpha = \omega\sqrt{L_1 C_1}, \quad V_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (7.13)$$

Таблиця 7.1

Тип і конструкція лінії	Погонні параметри		
	L_1 , Гн / м	C_1 , Ф / м	R_1 , Ом / м
 <p>Двопровідня</p>	$\frac{\mu\mu_0}{\pi} \lg \frac{d}{a}$, якщо $d \ll a$	$\frac{\pi\epsilon\epsilon_0}{\lg \frac{d}{a}}$, якщо $d \ll a$	$\frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\sigma}}$
 <p>Коаксіальна</p>	$\frac{\mu\mu_0}{2\pi} \lg \frac{b}{a}$	$\frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\lg \frac{b}{a}}$	$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\sigma}}$
 <p>Стрічкова</p>	$\frac{\mu\mu_0 h}{b}$	$\frac{\epsilon\epsilon_0 b}{h}$	$\frac{1}{b} \sqrt{\frac{2\omega\mu\mu_0}{\sigma}}$
$\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = 12,556 \cdot 10^{-7}$ Гн/м; ω — частота, с^{-1} ; σ — питома об'ємна провідність матеріалу провідників, Ом/м; μ, ϵ — відносні магнітна та електрична проникності середовища (металу — у формулах для R_1)			

Підставивши у (7.13) вирази для L_1 , C_1 , взяті з табл. 7.1, одержимо, що, незалежно від типу лінії,

$$V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{V_c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

де $V_c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ — швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі. Цей результат відповідає уявленню про те, що хвилі напруги та струму у лінії супроводяться електромагнітною хвилею у навколишньому просторі.

Приклад 7.1. Радіус зовнішнього провідника коаксialьного кабелю $b = 5 \text{ мм}$. Як діелектрик у кабелі застосовано полістирол ($\varepsilon = 2,56$). Провідники виконані з міді: $\mu = 1$, $\sigma = 5,81 \cdot 10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1}$. Робоча частота $f = 300 \text{ МГц}$. Розрахувати радіус a внутрішнього провідника з тим, щоб отримати мінімальне згасання. Знайти хвильовий опір, коефіцієнти згасання та фази, фазову швидкість і довжину хвилі в кабелі. Втратами у діелектрику знехтувати.

Розв'язання. Нехтуючи G_1 в (7.13), знаходимо $\beta \approx R_1/2\rho$. За допомогою формул у табл. 7.1 виражаємо β через геометричні параметри:

$$\beta = \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{2\sigma}} \cdot \frac{1+b/a}{\ln b/a}. \text{ Аналізуючи } \beta \text{ як функцію } b/a, \text{ знаходимо, що згасання}$$

є мінімальним при $b/a = 3,6$, звідки $a = 1,4 \text{ мм}$. Далі знаходимо:

$$\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = 48 \text{ Ом}, \quad V_\phi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = 1,88 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \lambda = \frac{V_{\text{ср}}}{f} = 0,625$$

$$\text{м}, \quad \alpha = \frac{\omega}{V_{\text{ср}}} = 10,05 \text{ рад} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \beta = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ Неп} \cdot \text{м}^{-1}.$$

7.2. Хвильові процеси у довгих лініях

72.1. Довга лінія без втрат. Режим біжних хвиль

Аналіз процесів у довгих лініях можна спростити, нехтуючи втратами, що часто буває прийнятним у реальних лініях з малими втратами. Беручи $R_1 = 0$, $G_1 = 0$, знаходимо: $\underline{\gamma} = j\omega\sqrt{L_1C_1} = j\alpha$, $\underline{Z}_0 = \sqrt{L_1/C_1} = \rho$. Підставивши це у (7.5), одержуємо:

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_2 + \rho \underline{I}_2}{2} e^{j\alpha x} + \frac{\underline{U}_2 - \rho \underline{I}_2}{2} e^{-j\alpha x}, \quad \underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_2 + \rho \underline{I}_2}{2\rho} e^{j\alpha x} - \frac{\underline{U}_2 - \rho \underline{I}_2}{2\rho} e^{-j\alpha x}. \quad (7.14)$$

Оскільки $e^{\pm j\alpha x} = \cos \alpha x \pm j \sin \alpha x$, ці рівняння зводяться до вигляду:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos \alpha x + j\rho \underline{I}_2 \sin \alpha x, \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cos \alpha x + j \frac{\underline{U}_2}{\rho} \sin \alpha x. \quad (7.15)$$

Рівняння (7.14) та (7.15) використовують для аналізу хвильових процесів при різних навантаженнях. Так, якщо $\underline{Z}_H = R_H = \rho$, то $\underline{U}_2 = \rho \underline{I}_2$. Тоді з (7.14) знаходимо: $\underline{U}(x) = \underline{U}_2 e^{j\alpha x}$, $\underline{I}(x) = \underline{I}_2 e^{j\alpha x}$, а також

$$u(t, x) = U_2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \alpha x), \quad i(t, x) = I_2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \alpha x). \quad (7.16)$$

Якщо зіставити це з (7.8), то побачимо, що вирази (7.16) описують хвилі, що біжать від початку до кінця лінії. Зауважимо, що прикметою *біжної хвилі* є залежність початкової фази від просторової координати, причому якщо ця складова фази має знак мінус, як в (7.8), то хвиля рухається у напрямку координатної осі, а якщо плюс, то в протилежному напрямку. Вирази (7.16) також показують, що в режимі біжних хвиль у лінії без втрат амплітуда хвилі стала, а зсув фаз між напругою та струмом дорівнює нулю в будь-якій точці лінії. При цьому вхідний опір

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}(x) / \underline{I}(x) = \rho.$$

7.2.2. Режим стійних хвиль

Проаналізуємо *режим стійних хвиль*, який виникає за відсутності втрат у навантаженні, що має місце у трьох випадках: кінець лінії розімкнений, або короткозамкнений, або лінія навантажена на реактивний опір. Якщо лінія розімкнена, $\underline{I}_2 = 0$. Тоді рівняння (7.15) набирають вигляд

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cos \alpha x, \quad \underline{I}(x) = j(\underline{U}_2 / \rho) \sin \alpha x.$$

Звідси знаходимо розподіл амплітуд напруги та струму вздовж лінії:

$$U(x) = U_2 |\cos \alpha x|, \quad I(x) = (U_2 / \rho) |\sin \alpha x|,$$

вхідний опір $\underline{Z}_{\text{вх}}(x) = \underline{U}(x) / \underline{I}(x) = -j \operatorname{ctg} \alpha x = -j x_{\text{вх}}$, миттєві напругу та струм:

$$u(t, x) = U_2 \cos \alpha x \cdot \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$i(t, x) = (U_2 / \rho) \sin \alpha x \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2).$$

За допомогою одержаних виразів побудовано: на рис. 8.4 – розподіл амплітуд напруги та струму в лінії, на рис. 7.5 – залежність модуля вхідного опору від

відстані до кінця лінії, на рис. 7.7 – розподіл миттєвих величин напруги та струму в лінії через інтервали часу, що дорівнює $T/8$.

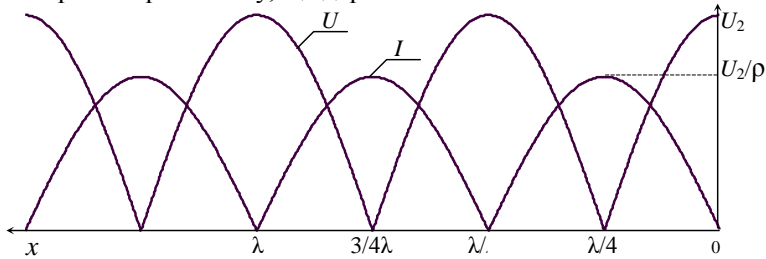


Рис. 7.4

У короткозамкненій лінії $\underline{U}_2 = 0$. Отже, згідно з (7.15) маємо

$$\underline{U}(x) = j\rho I_2 \sin \alpha x, \quad \underline{I}(x) = I_2 \cos \alpha x.$$

Тоді $U(x) = \rho I_2 |\sin \alpha x|$, $I(x) = I_2 |\cos \alpha x|$, вхідний опір $\underline{Z}_{\text{вх}} = j \rho \tan \alpha x = j x_{\text{вх}}$, миттєві величини напруги та струму:

$$u(x, t) = \rho I_2 \sin \alpha x \cdot \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2), \quad i(x, t) = I_2 \cos \alpha x \cdot \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Якщо на рисунках 7.4 та 7.7 поміняти місцями напругу та струм, одержимо відповідні графіки для короткозамкненої лінії. Графік вхідного опору такої лінії зображено на рис. 7.6.

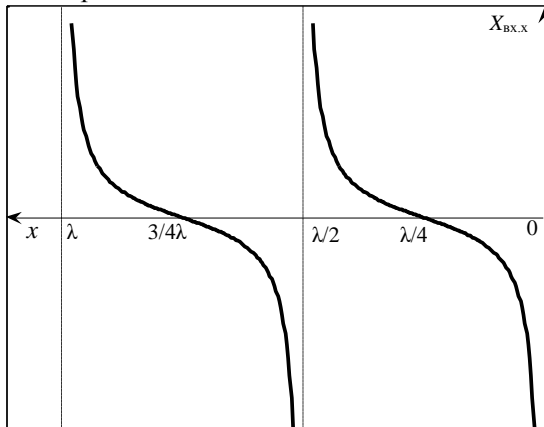


Рис. 7.5

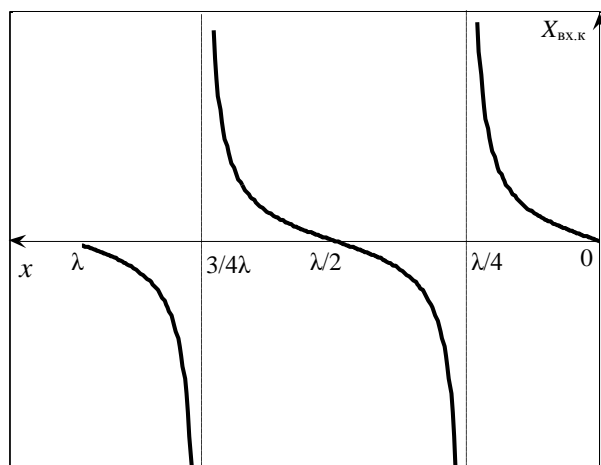


Рис. 7.6

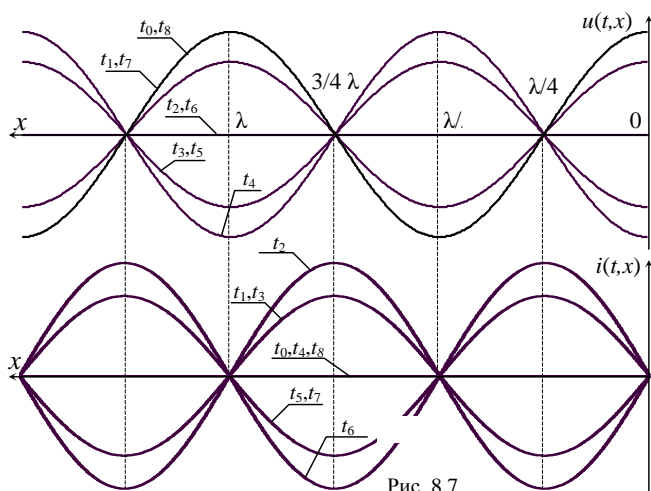


Рис. 7.7

Рис. 8.7

Розглянемо випадок реактивного навантаження. Нехай $\underline{Z}_n = \pm jX_n$, тоді з (7.15) виводимо:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 (\cos \alpha x \pm \rho / X_n \sin \alpha x) = \underline{U}_2 \sqrt{1 + (\rho / X_n)^2} \cdot \cos(\alpha x \mp \varphi_x),$$

де $\varphi_x = \arctg \rho / X_n$. Аналогічно одержують комплексну амплітуду струму. На рис. 7.8 показано розподіл амплітуд напруги та струму в лінії при реактивних навантаженнях різних знаків.

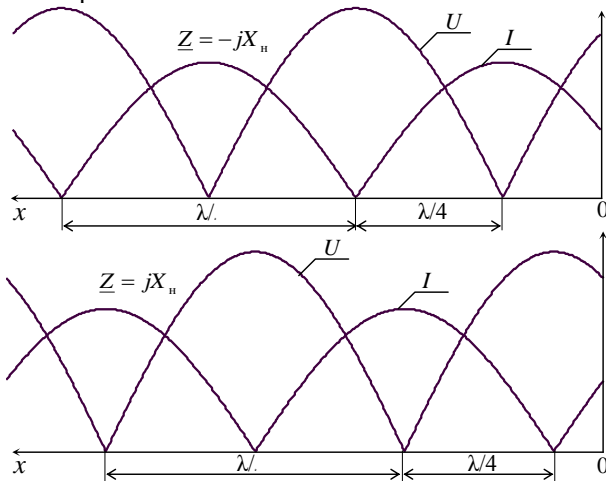


Рис. 7.8

Проведений аналіз показує, що в режимі стійних хвиль у будь-якій точці лінії напруга та струм мають зсув фаз $\pm \pi/2$, що зумовлює реактивний характер вхідного опору лінії. Це означає, що в такому хвильовому процесі немає напрямленого перенесення енергії, а лише відбувається періодичний обмін енергією між окремими ділянками лінії.

Характерним для режиму стійних хвиль є розподіл амплітуд із вузлами, в яких амплітуда дорівнює нулю, й пучностями, де амплітуда максимальна. Така картина є результатом інтерференції двох біжних хвиль: спадної та відбитої від кінця лінії. Справді, при $\underline{I}_2 = 0$ в (7.14) маємо $\underline{U}(x) = (\underline{U}_2/2)e^{j\alpha x} + (\underline{U}_2/2)e^{-j\alpha x}$, звідки випливає:

$$u(x,t) = \frac{U_2}{2} \cos(\omega t + \alpha x) + \frac{U_2}{2} \cos(\omega t - \alpha x) .$$

Отже, напруга складається із двох хвиль. Перша поширюється у напрямку, протилежному осі x , тобто від генератора. Це *спадна хвиля*.

Друга поширюється в напрямку осі x від кінця лінії. Це *відбита хвиля*. Обидві ці хвилі мають однакові амплітуди. Тому в точці, куди ці хвилі приходять у протифазі, маємо нульовий вузол, а де вони синфазні – пучність.

7.2.3. Режим змішаних хвиль

Режими біжних і стійних хвиль являють собою дві крайнощі, між якими лежить множина *режимів змішаних хвиль*, виникаючих, коли опір навантаження не дорівнює хвильовому. При цьому енергія спадної хвилі частково поглинається, і амплітуда відбитої хвилі менша, ніж у спадної. Тому амплітуда результуючої хвилі у вузлових точках не дорівнює нулю, як в режимі стійних хвиль.

Розглянемо випадок резистивного навантаження $R_n \neq \rho$. Перетворюємо рівняння (7.15) до вигляду

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2 (\cos \alpha x + j(\rho/R_n) \sin \alpha x), \quad \underline{I}(x) = \underline{I}_2 (\cos \alpha x + j(R_n/\rho) \sin \alpha x),$$

звідки знаходимо

$$\underline{U}(x) = U_2 \sqrt{\cos^2 \alpha x + (\rho/R_n)^2 \sin^2 \alpha x} \cdot e^{j\varphi_u}, \quad \underline{I}(x) = I_2 \sqrt{\cos^2 \alpha x + (R_n/\rho)^2 \sin^2 \alpha x} \cdot e^{j\varphi_i},$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(x) = \rho \frac{R_n \cos \alpha x + j\rho \sin \alpha x}{\rho \cos \alpha x + jR_n \sin \alpha x}, \quad (7.17)$$

де $\varphi_u = \varphi_{u2} + \arctg((\rho/R_n) \operatorname{tg} \alpha x)$, $\varphi_i = \varphi_{i2} + \arctg((R_n/\rho) \operatorname{tg} \alpha x)$.

На рис. 7.9 показано розподіл амплітуд напруги та струму в лінії при $R_n > \rho$, а також залежність активної та реактивної складових вхідного опору від довжини лінії (рис. 7.10).

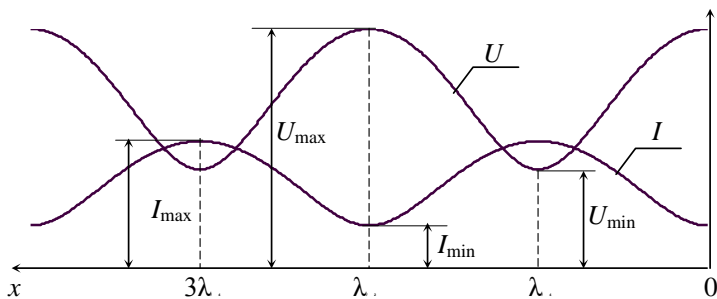


Рис. 7.9

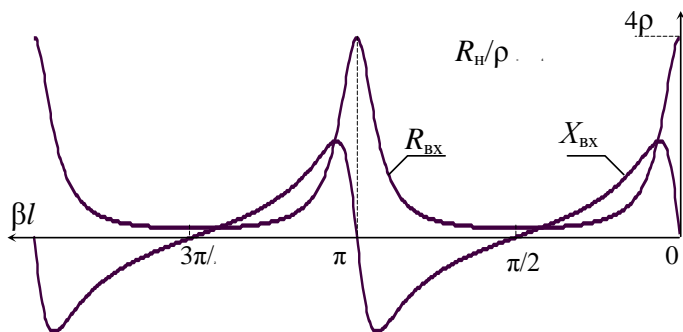


Рис. 7.10

7.2.4. Коефіцієнт відбиття. Коефіцієнти біжної та стійної хвиль

Ступінь відбиття хвиль від кінця лінії характеризується *коефіцієнтом відбиття*, який дорівнює відношенню комплексних амплітуд відбитої та спадної хвиль у кінці лінії. Ураховуючи, що в (8.14) перший доданок є комплексною амплітудою спадної хвилі, а другий — відбитої, і беручи $x = 0$, знаходимо коефіцієнти відбиття напруги та струму:

$$\underline{P}_U = \frac{\underline{Z}_n - \rho}{\underline{Z}_n + \rho}, \quad \underline{P}_i = -\underline{P}_U. \quad (7.18)$$

Ці вирази, зокрема, показують, що при $\underline{Z}_n = 0$ (короткозамкнена лінія) $\underline{P}_U = -1$, $\underline{P}_i = 1$. Це означає, що хвиля напруги відбивається у протифазі, причому амплітуди спадної та відбитої хвиль рівні між собою. Тому в кінці

лінії маємо нульовий вузол напруги. Тим часом хвиля струму відбивається без зміни фази, отож, спадна та відбита хвилі струму на кінці лінії підсумовуються, утворюючи пучність. У разі розімкненої лінії $\underline{Z}_n \rightarrow \infty$, а отже, $\underline{P}_U = 1$, $\underline{P}_i = -1$. При цьому в кінці лінії утворюється пучність напруги та вузол струму.

Режими змішаних хвиль характеризують *коефіцієнтом біжної хвилі* $K_{БХ} = U_{\min}/U_{\max}$, де U_{\min}, U_{\max} — величини напруг у вузлі та пучності (див. рис. 8.9). У режимі стійних хвиль $K_{БХ} = 0$, а в режимі біжних хвиль $K_{БХ} = 1$. Крім $K_{БХ}$, використовують також *коефіцієнт стійної хвилі* $K_{СХ} = 1/K_{БХ}$. Якщо врахувати, що $U_{\min} = |U_{\Pi}| - |U_{В}|$, $U_{\max} = |U_{\Pi}| + |U_{В}|$, де $U_{\Pi}, U_{В}$ — амплітуди спадної та відбитої хвилі, то

$$K_{БХ} = \frac{|U_{\Pi}| - |U_{В}|}{|U_{\Pi}| + |U_{В}|} = \frac{1 - |P_u|}{1 + |P_u|}.$$

У разі активного навантаження, покладаючи $\underline{Z}_n = R_n$ у (8.18), одержимо

$$K_{БХ} = \left(1 + \frac{R_n - \rho}{R_n + \rho} \right) / \left(1 - \frac{R_n - \rho}{R_n + \rho} \right),$$

звідки знаходимо, що $K_{БХ} = \rho/R_n$ при $R_n > \rho$ або $K_{БХ} = R_n/\rho$, якщо $R_n < \rho$.

КМ 7.2. Виконати завдання з підрозділу 7.4.2.

Приклад 7.2. Лінія (рис. 7.11), складається із двох відрізків довжиною $l_1 = 5,1$ м та $l_2 = 2,5$ м із хвильовими опорами $\rho_1 = 50$ Ом, $\rho_2 = 100$ Ом. До входу ввімкнено джерело напруги з амплітудою $U = 100$ В і частотою $f = 30$ МГц. Вихід лінії може або замикатись, або розмикатися, або навантажуватись на опір $R_n = 200$ Ом. На які напруги і струми має бути розрахований кожен із відрізків лінії? Втратами у лінії знехтувати.

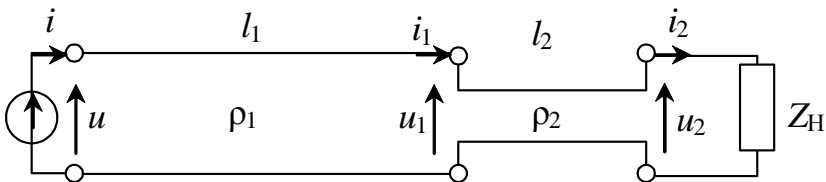


Рис. 7.11

Розв'язання. Для відповіді на поставлене питання потрібно знайти струми й напруги в пучностях у кожному з режимів роботи лінії. Знаходимо довжину хвилі $\lambda = V_c / f = 10$ м й *електричну довжину* відрізків лінії, під якою розуміють $\alpha l_1 = 2\pi l_1 / \lambda = 1,01\pi$, $\alpha l_2 = 2\pi l_2 / \lambda = \pi/2$.

Далі здійснюємо аналіз для кожного із заданих режимів навантаження, а саме:

а) $\underline{Z}_H = \infty$; б) $\underline{Z}_H = 0$; в) $\underline{Z}_H = R_H = 200$ Ом.

Знаходимо вхідний опір відрізка l_2 за формулою (7.17): а) $\underline{Z}_{\text{вх}2} = 0$; б) $\underline{Z}_{\text{вх}2} = \infty$; в) $\underline{Z}_{\text{вх}2} = \rho_2^2 / R_H = 50$ Ом.

Розглядаючи $\underline{Z}_{\text{вх}2}$ як навантаження відрізка l_1 , за формулою (7.17) розрахуємо вхідний опір лінії: а) $\underline{Z}_{\text{вх}1} = j\rho_1 \operatorname{tg} \alpha l_1 = j2,8$ Ом; б) $\underline{Z}_{\text{вх}1} = -j\rho_1 \operatorname{ctg} \alpha l_1 = -j902$ Ом; в) $\underline{Z}_{\text{вх}1} = \rho_1 = 50$ Ом.

Знаходимо амплітуду струму на вході лінії l_1 як $I = U / \underline{Z}_{\text{вх}1}$: а) $I = 35,7$ А; б) $I = 0,11$ А; в) $I = 2,0$ А. За рівнянням (7.15) знаходимо напругу і струм на виході відрізка l_1 (на вході l_2):

а) $I_1 = I_{\max 1} = I / \cos \alpha l_1 = 35,8$ А, $U_1 = 0$, $U_{\max 1} = \rho_1 I_{\max 1} = 1\,788$ В;

б) $U_1 = U_{\max 1} = U / \cos \alpha l_1 = 100,2$ В, $I_1 = 0$, $I_{\max 1} = U_{\max 1} / \rho_1 = 2$ А;

в) $U_1 = U = 100$ В, $I_1 = I = 2$ А.

За допомогою рівнянь (7.15) розрахуємо струми та напруги на виході відрізка l_2 :

а) $I_2 = 0$, $U_2 = \rho_2 I_1 = U_{\max 2} = 3\,580$ В;

б) $U_2 = 0$, $I_2 = U_1 / \rho_2 = I_{\max 2} = 1$ А;

в) $U_2 = \rho_2 I_1 = 200$ В, $I_2 = U_1 / \rho_2 = 1$ А.

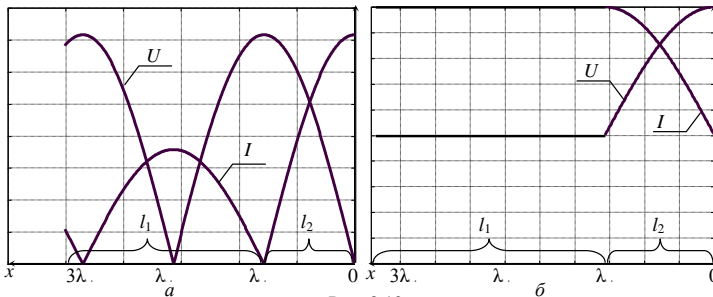


Рис. 8.12

Отже, найважчим є режим при розімкненому кінці лінії, коли напруга у пучності на відрізку l_1 досягає 1 788 В, а в пучності на відрізку l_2 – 3 580 В. При цьому через стик відрізків протікає струм 35,8 А, а на вході лінії через джерело – струм 35,7 А. Одержаний результат ілюструється розподілом амплітуд напруги та струму в лінії: рис. 8.12, *а* – при розімкненому кінці лінії, рис. 8.12, *б* – при резистивному навантаженні.

7.3. Застосування довгих ліній у радіоелектроніці

7.3.1. Довга лінія як фідер

Одним із застосувань довгих ліній у радіоелектроніці є передача сигналів від джерела до навантаження на віддалі, що більша за довжину хвилі, наприклад, від передавача до антени. Така лінія називається *фідером* (від англ. *to feed* – живити). При цьому намагаються отримати режим біжних хвиль, який забезпечує мінімальні втрати. Це пояснюється тим, що в режимі змішаних хвиль виникає відбита хвиля, яка, поширюючись у зворотному напрямку, втрачає енергію, що призводить до зростання загальних втрат. Крім того, в режимі змішаних хвиль виникають пучності напруги та струму, що накладає додаткові вимоги до міцності ізоляції між провідниками і призводить до перегрівання проводів у пучностях струму.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) фідера визначається як $\eta = P_2 / P_1$, де активна потужність у навантаженні $P_2 = RI_2^2 / 2$ і активна потужність на вході лінії

$$P_1 = \operatorname{RE} \left(\underline{U}_1 I_1^* \right) / 2. \text{ Доведено, що при резистивному навантаженні}$$

$$\eta = (\operatorname{ch} 2\beta l + 0,5(R_n / \rho + \rho / R_n) \operatorname{sh} 2\beta l)^{-1}.$$

Звичайно $\beta l \ll 1$. Тоді $\eta \approx (1 + (R_n / \rho + \rho / R_n) \beta l)$. Максимальний ККД одержується в режимі біжних хвиль, коли $R_n = \rho$, а саме $\eta = 1 / (1 + 2\beta l) \approx e^{-2\beta l} \approx 1 - 2\beta l$.

7.3.2. Узгодження навантаження з лінією

Для одержання режиму біжних хвиль необхідно забезпечити рівність опору навантаження та хвильового опору. Якщо ця умова не виконується, вживають спеціальні заходи до *узгодження навантаження з лінією*. Розглянемо один із узгоджувальних пристроїв — *чвертьхвильовий трансформатор*, що являє собою відрізок лінії з довжиною $l_T = \lambda/4$ та з хвильовим опором ρ_T , ввімкнений між фідером і навантаженням (див. рис. 7.13). Вхідний опір чвертьхвильового трансформатора знаходимо, підставляючи в (7.17) $x = \lambda/4$ або $\alpha x = \pi/4$, а саме $Z_{\text{вх},T} = \rho_T^2 / R_H$. Щоб одержати біжну хвилю у фідері, потрібно мати $Z_{\text{вх},T} = \rho$, або $\rho_T = \sqrt{\rho R_H}$. При цьому фідер навантажуватиметься на узгоджений опір і в ньому буде забезпечено режим біжної хвилі. У самому ж трансформаторі буде режим змішаних хвиль, бо $\rho_T \neq R_H$. Проте усунення відбитої хвилі у фідері суттєво зменшує втрати і поліпшує умови його роботи. Зауважимо, що у прикладі 7.2 відрізок l_2 є чвертьхвильовим трансформатором, а l_1 — фідером. Розподіл амплітуд напруги та струму показано на рис. 7.12, б.

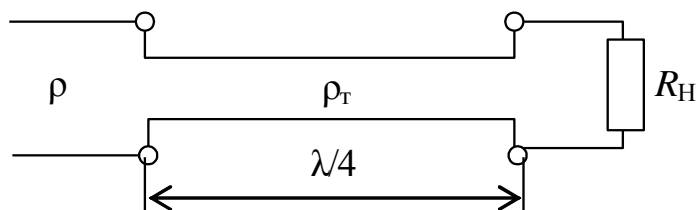


Рис. 7.13

Приклад 7.3. Для узгодження навантаження з лінією застосовано *короткозамкнений шлейф* (рис. 7.14). Розрахувати довжину шлейфа S та відстань від кінця лінії h , якщо хвильовий опір лінії ρ_1 , а шлейфа ρ_2 , опір навантаження R_H , довжина хвилі λ . Пояснити, як забезпечується узгодження.

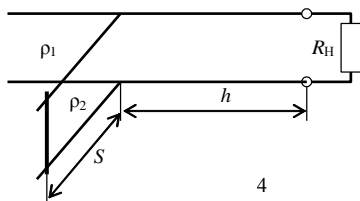


Рис. 7.14

Розв'язання. З точки зору хвильових уявлень, процеси в лінії зі шлейфом можна пояснити так. Спадна хвиля у місці приєднання шлейфа розгалужується. Виникають відбиті хвилі як від навантаження, так і від кінця шлейфа. Треба підібрати довжину шлейфа та місце його ввімкнення так, щоб обидві відбиті хвилі, маючи однакові амплітуди, приходили до розгалуження у протифазі і взаємно гасилися. При цьому у всій лінії до шлейфа буде поширюватися лише спадна хвиля.

З боку основної лінії місце вмикання шлейфа є паралельним з'єднанням суто реактивної входної провідності шлейфа та комплексної входної провідності відрізка лінії h , яка за (8.17) дорівнює

$$\underline{Y}_{\text{вх}} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_1 + jR_{\text{н}} \operatorname{tg} \alpha h}{R_{\text{н}} + j\rho_1 \operatorname{tg} \alpha h} = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1 R_{\text{н}} + \rho_1 R_{\text{н}} \operatorname{tg}^2 \alpha h}{R_{\text{н}} + \rho_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha h} + j \frac{R_{\text{н}}^2 \operatorname{tg} \alpha h - \rho_1^2 \operatorname{tg} \alpha h}{R_{\text{н}} + \rho_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha h} \right).$$

Відстань h виберемо так, щоб активна складова входної провідності дорівнювала $1/\rho_1$, а саме: $\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_1 R_{\text{н}} + \rho_1 R_{\text{н}} \operatorname{tg}^2 \alpha h}{R_{\text{н}}^2 + \rho_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha h} = \frac{1}{\rho_1}$, звідки $\operatorname{tg} \alpha h = \sqrt{\frac{R_{\text{н}}}{\rho_1}}$ та

$h = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R_{\text{н}}}{\rho_1}}$. При цьому реактивна складова входної провідності

$B_{\text{вх}} = \frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{R_{\text{н}} - \rho_1}{\sqrt{R_{\text{н}} \rho_1}}$. Довжина шлейфа має бути такою, щоб його входна про-

відність $B_{\text{вх.ш}} = 1/\rho_2 \operatorname{tg} \alpha S$ компенсувала $B_{\text{вх}}$, тобто $\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{R_{\text{н}} - \rho_1}{\sqrt{R_{\text{н}} \rho_1}} - \frac{1}{\rho_2 \operatorname{tg} \alpha S} = 0$,

звідки знаходимо

$$S = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\rho_1 \sqrt{R_{\text{н}} \rho_1}}{\rho_2 (R_{\text{н}} - \rho_1)}.$$

7.3.3. Застосування відрізків довгих ліній

У діапазоні метрових і дециметрових хвиль використання котушок і конденсаторів як реактивних компонентів стає недоцільним. Як такі застосовуються відрізки довгих ліній, які більш прості конструктивно і технологічно. На коротших хвилях замість довгих ліній використовують хвилеводи. На відрізках довгих ліній реалізують також резонансні кола та фільтри. Розглянемо ЧХ вхідного опору лінії. Беручи у (7.17) $x=l$ та $\alpha l = \omega l/V_c$ [див. (7.9)], одержимо

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \rho \frac{R_{\text{н}} \cos(\omega l/V_c) + j\rho \sin(\omega l/V_c)}{\rho \cos(\omega l/V_c) + jR_{\text{н}} \sin(\omega l/V_c)}, \quad (7.19)$$

звідки при $R_{\text{н}} = 0$ та $R_{\text{н}} \rightarrow \infty$ знаходимо для замкненої та розімкненої на кінці ліній:

$$\underline{Z}_{\text{вх.к.}} = j\rho \operatorname{tg}(\omega l/V_c), \quad \underline{Z}_{\text{вх.х.}} = -j\rho \operatorname{ctg}(\omega l/V_c).$$

На рис. 7.15 наведено ЧХ, що описуються виразами (7.19), з якого видно, що реактивний вхідний опір лінії може бути як ємнісним, так і індуктивним, і за значенням змінюватися від 0 до ∞ . Причому поблизу частот $\omega_{0k} = k\pi V_c/2l$, $k=1, 2, \dots$ характер залежності $X_{\text{вх}}$ від частоти такий самий, як у резонансного контура без втрат. Щоб урахувати втрати, потрібно замість (7.17) користуватися виразом

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_0 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x}{\underline{Z}_0 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_{\text{н}} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x},$$

який виводиться з рівнянь (7.5). При малих втратах $\underline{Z}_0 \approx \rho$. Для короткозамкненого відрізка лінії довжини l при $\underline{Z}_{\text{н}} = 0$ одержуємо

$$\underline{Z}_{\text{вх.к.}} = \rho \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \rho \frac{\operatorname{sh} \beta l \cos \alpha l + j \operatorname{ch} \beta l \sin \alpha l}{\operatorname{ch} \beta l \cos \alpha l + j \operatorname{sh} \beta l \sin \alpha l}.$$

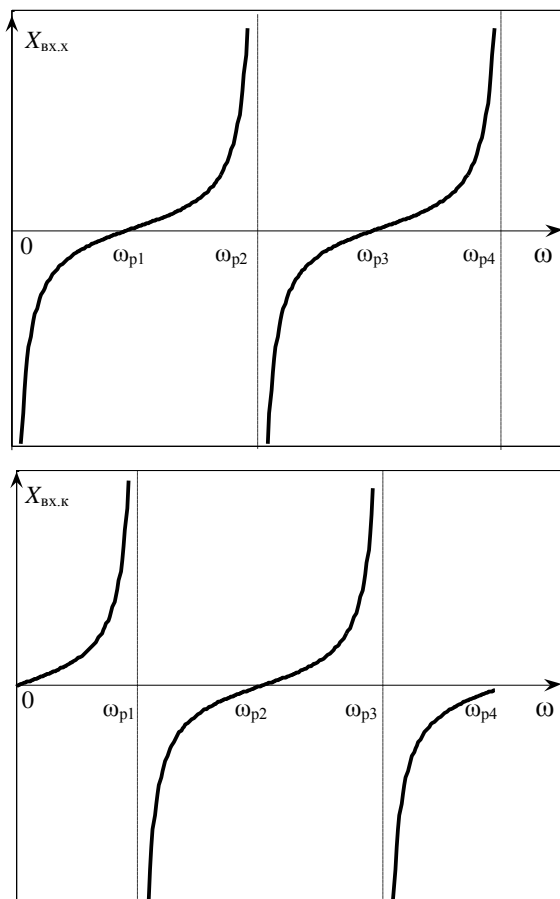


Рис. 7.15

Якщо $l = \lambda/4$, то $\alpha l = \pi/2$, а отже, $\underline{Z}_{\text{BX.K.}} = \rho \text{ch}\beta / \text{sh}\beta$. Зазвичай $\beta l \ll 1$, тоді $\text{sh}\beta l \approx \beta l$, $\text{ch}\beta l \approx 1$, $\underline{Z}_{\text{BX.K.}} \approx \rho / \beta l = R_{\text{ep}}$. При малому розстроєнні

$$\alpha l = \omega l / V_c = l(\omega_p + \Delta\omega) / V_c = \pi/2 + \delta,$$

де $\delta = \pi\Delta\omega / 2\omega_p \ll 1$. Тоді $\cos\alpha l \approx -\delta$, $\sin\alpha l \approx 1$. $\underline{Z}_{\text{BX.K.}} = \frac{\rho}{\beta l} \cdot \frac{1}{1 + j\delta/\beta l}$.

Зіставлення одержаного виразу з формулою вхідного опору паралельного резонансного контура (7.18) показує, що чвертьхвильовий замкнений відрізок лінії еквівалентний паралельному контуру, що має резонансний опір $R_{\text{ер}} = \rho/\beta l$, резонансну частоту $\omega_{p1} = \pi V_c/2l$, узагальнене розстроєння $\chi = \delta/\beta l = \Delta\omega\pi/2\omega_{p1}$ еквівалентну добротність $Q_e = \pi/2\beta l$. Аналогічно можна показати, що на частоті ω_{p2} той самий відрізок лінії еквівалентний послідовному резонансному контуру. На відміну від контура, відрізок лінії має безліч резонансних частот ω_{pk} , причому на частотах з непарним номером k маємо еквівалент паралельного контура, а на частотах з парним k – послідовного контура. Також доводиться, що розімкнений відрізок лінії еквівалентний паралельному контуру на парних частотах ω_k , а на непарних – послідовному контуру.

Приклад 7.4. Розрахувати довжину відрізка лінії так, щоб на частоті $f = 300$ МГц мати: а) еквівалент індуктивності $L = 1$ мкГн; б) еквівалент ємності $C = 10$ пФ; в) еквівалент паралельного контура. В останньому випадку розрахувати еквівалентну добротність і смугу пропускання. В усіх випадках використати коаксіальний кабель, параметри якого були розраховані у прикладі 8.1: $\rho = 50$ Ом, $\alpha = 10,05$ рад/м, $\beta = 7 \cdot 10^{-3}$ Нп/м.

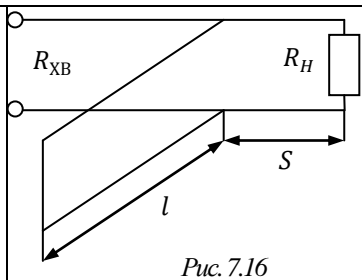
Розв'язання. а) Відрізок лінії з індуктивним вхідним опором матиме найменшу довжину при замиканні кінця (див. рис. 7.6). Знаходимо $X_L = 2\pi fL = 1885$ Ом. Розраховуємо довжину відрізка за формулою $l = (\lambda/2\pi)\text{arctg}(X_L/\rho) = 0,154$ м, яка впливає з (7.19).

б) Відрізок лінії мінімальної довжини з ємнісним вхідним опором має бути розімкненим (див. рис. 7.5). Знаходимо $X_C = 1/2\pi fC = 53$ Ом. Розраховуємо довжину відрізка за формулою

$$l = (\lambda/2\pi)\text{arctg}(\rho/X_C) = 0,073 \text{ м.}$$

в) Відрізок лінії, еквівалентний паралельному контуру, має мінімальну довжину $l = \lambda/4$ при замкненому кінці. Знаходимо $l = V_c/2f = 0,25$ м, еквівалентну добротність $Q_e = \pi/2\beta l = 1457$ та смугу пропускання $\Pi_{0,7} = f_p/Q_e = 206$ кГц.

Приклад 7.5. У лінії без втрат (рис. 7.16) визначити місце ввімкнення короткозамкненого шлейфу S довжиною $l = 0.4$ м, щоб лінія була узгоджена (рис. 1.78) на частоті $f = 50$ МГц. Лінія має хвильовий опір $R_{XB} = 25$ Ом та опір навантаження $R_H = 100$ Ом.



Розв'язання

Довжина хвилі

$$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{50 \cdot 10^6} = 6 \text{ м.}$$

Вхідна провідність

$$Y_{XB} = Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)}, \quad m_1 = \frac{1}{m} = \frac{R_H}{R_{XB}} = \frac{100}{25} = 4.$$

Виділимо дійсну та уявну частини вхідної провідності

$$\begin{aligned} Y_{BX} &= Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} = \\ &= Y_{XB} \frac{\cos(\beta x) + j m_1 \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) + j \sin(\beta x)} \cdot \frac{m_1 \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)}{m_1 \cos(\beta x) - j \sin(\beta x)} = \\ &= Y_{XB} \frac{m_1}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} + 0.5j Y_{XB} \frac{[m_1^2 - 1] \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)}. \end{aligned}$$

Вхідна провідність короткозамкненої ділянки

$$Y_{BX.KЗ} = -j Y_{XB} \operatorname{ctg}(\beta x) = \frac{-j}{R_{XB}} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot l\right) = \frac{-j}{25} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{6} \cdot 0.4\right) = \frac{-j}{11.13}.$$

Отже, необхідно компенсувати провідність $Y = -0.09j$ Сім.

Визначимо місце ввімкнення шлейфу

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[Y_{BX}] &= Y_{BX.KЗ}; \\ \operatorname{Im}[Y_{BX}] &= Y_{XB} \frac{0.5[m_1^2 - 1] \sin(2\beta x)}{m_1^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = Y_{XB} \frac{0.5[4^2 - 1] \sin(2\beta x)}{4^2 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)} = \frac{1}{11.13}. \end{aligned}$$

Спростимо рівняння

$$11.13 \cdot 15 \cdot (\sin(\beta x) \cdot \cos(\beta x)) = 16 \cos^2(\beta x) + \sin^2(\beta x)$$

Розділимо обидві частини на $\cos^2(\beta x)$

$$\begin{aligned} 167 \operatorname{tg}(\beta x) &= 16 + \operatorname{tg}^2(\beta x); \\ \operatorname{tg}^2(\beta x) - 167 \operatorname{tg}(\beta x) + 16 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'яжемо рівняння

$$\operatorname{tg}(\beta x) = \frac{167 \pm \sqrt{27830}}{2}; \quad \operatorname{tg}(\beta x) = 166.912; \quad \operatorname{tg}(\beta x) = 0.088.$$

Звідси визначимо місце ввімкнення шлейфу

$$x_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \arctg(166.912^\circ) = \frac{6}{2\pi} \cdot 1.565 = 1.5 \text{ м};$$

$$x_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \arctg(0.088^\circ) = \frac{6}{2\pi} \cdot 0.088 = 0.084 \text{ м}.$$

Відповідь: $S_1 = 1.5 \text{ м}$, $S_2 = 0.084 \text{ м}$.

7.4. Комп'ютерне моделювання

7.4.1. Настроювання і вимірювання параметрів довгих ліній

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- методики настроювання довгих ліній;
- параметрів довгих ліній.

1. Настроїти відрізок довгої лінії (див. рис. 7.16) на режим біжних хвиль. Такий режим виникає в лінії, коли опір навантаження дорівнює хвильовому опору лінії і характеризується рівномірним розподілом амплітуд напруги і струму вздовж лінії без вузлів і пучностей. Для настроювання на режим біжних хвиль потрібно, подавши від генератора напругу з частотою 250 МГц, змінювати опір навантаження R_n у межах від 500 Ом до 1,5 кОм, допоки не зрівняються показання вольтметрів і амперметрів на вході і виході лінії. Визначити хвильовий опір лінії як такий, що дорівнює опоріві навантаження в режимі біжних хвиль.

2. Визначити довжину хвиль у лінії, вважаючи, що швидкість хвиль дорівнює $V_c = 3 \cdot 10^8$ м/с за формулою $\lambda = V_c / f$ і коефіцієнт фази $\alpha = 2\pi / \lambda$. Далі розрахувати електричну і геометричну довжину лінії за формулами:

$$\alpha l = 2\pi \frac{\Delta T}{T}, \quad l = 2\pi \frac{\Delta T}{T\alpha},$$

де ΔT — запізнення хвилі при поширенні від початку до кінця лінії. Останнє можна визначити за допомогою осцилографа (рис. 7.16), його розгорнутим зображенням (див. рис. 7.17), підвівши курсори до осцилограм вхідної і вихідної напруг, що перебувають в однакових фазах, як показано на рисунку. Тоді з правого боку під екраном можна прочитати час запізнення ($T_2 - T_1$). Для зручності можна надати різного кольору провідникам, що приєднані до різних входів осцилографа. Тоді осцилограми набудуть того самого кольору. Виконайте заміри

і розрахунки цього пункта для різних частот 125 МГц, 250 МГц, 500 МГц і порівняйте отримані результати.

Збільшуючи довжину хвилі (зменшуючи частоту), визначити, за якої довжини хвилі можна знехтувати запізненням, що є ознакою зосередженості електричного кола (див. підрозд. 2.5.3). З'ясувати, чи виконується при цьому умова зосередженості електричного кола (2.25).

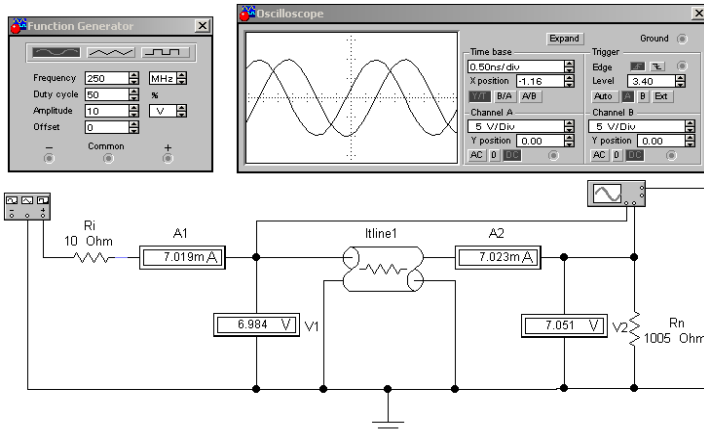


Рис. 7.16

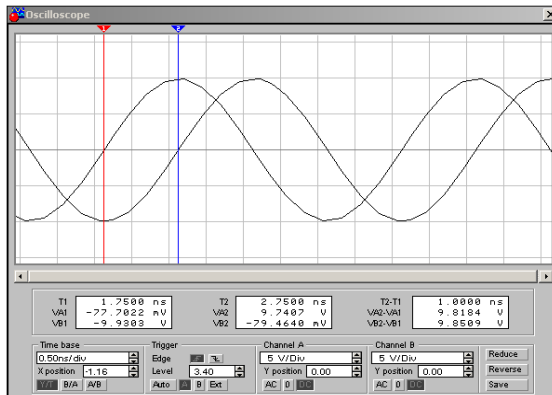


Рис. 7.17

7.4.2. Режими хвиль у довгих лініях

Метою комп'ютерного моделювання є:

- дослідження режимів роботи довгих ліній;
- вимірювання параметрів хвиль у довгих лініях за різних режимів роботи.

1. Скласти однорідну довгу лінію з однакових відрізків (див. рис. 7.18), параметри яких було виміряно в попередньому розділі. Лінія складається з восьми відрізків $W1, \dots, W8$, на стиках яких, а також на вході і виході лінії ввімкнено амперметри і вольтметри, які вимірюють діюче значення струму і напруги в цих точках лінії. Всі прилади треба перевести в режим змінного струму АС. На вході лінії ввімкнено джерело змінної напруги E , послідовно з яким треба ввімкнути опір R_i , що дорівнює хвильовому опору лінії з тим, щоб запобігти відбиттю хвиль від початку лінії у режимах стійних і змішаних хвиль. За допомогою перемикачів $S1, S2, S3$ можна реалізовувати різні граничні умови, а отже, отримувати різні режими хвиль у лінії.

2. За результатами вимірів амперметрів і вольтметрів побудувати розподіли амплітуд (діючих значень) напруг і струмів вздовж лінії в таких режимах:

- а) лінія навантажена на опір R_n , що дорівнює хвильовому опору лінії;
- б) лінія навантажена на опір R_n , що вдвічі більший за хвильовий опір лінії;
- в) лінія навантажена на опір R_n , що вдвічі менший за хвильовий опір лінії;
- г) лінія навантажена на ємність C_n ;
- д) лінія розімкнена на кінці;
- е) лінія короткозамкнена на кінці.

Усі ці умови навантаження лінії реалізуються перемикачами $S1, S2, S3$. Наприклад, опір R_n підмикається перемикачами $S1, S2$.

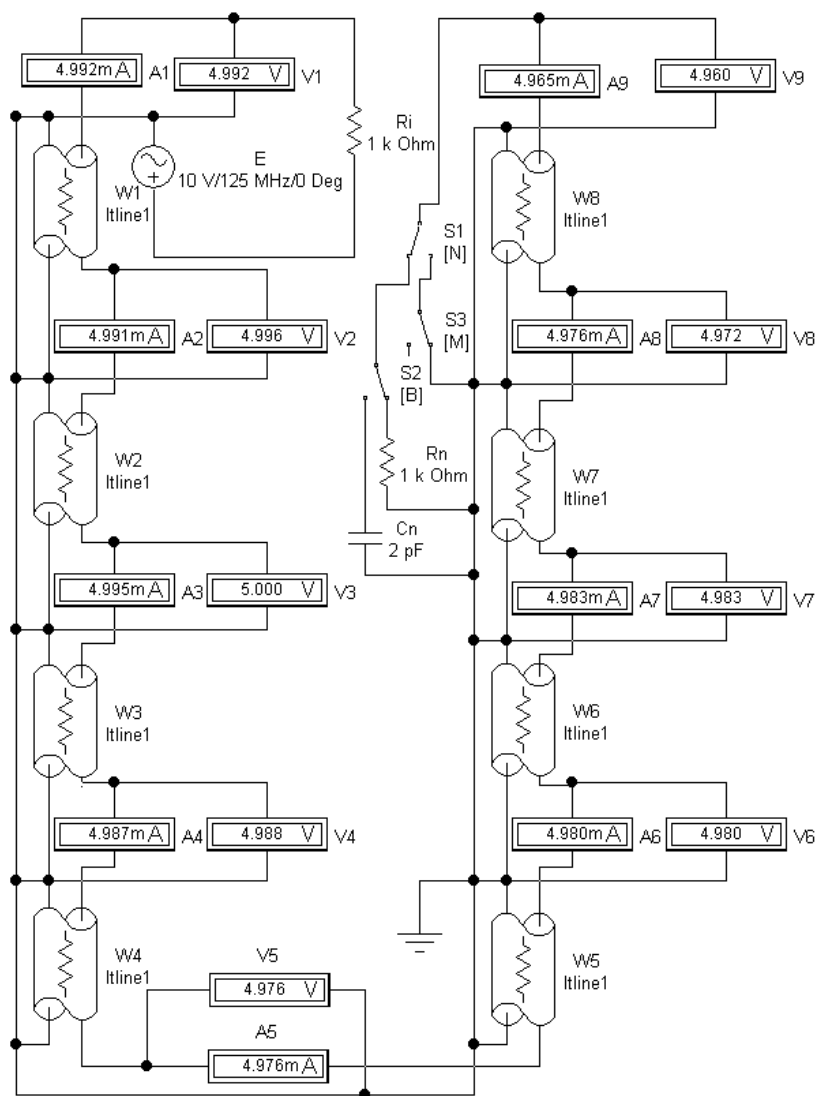


Рис. 7. 18

3. За результатами вимірів вольтметрів визначити напруги у вузлах і пучностях розподілу напруги в лінії і розрахувати коефіцієнт біжної хвилі як $K_{БХ} = U_{\min} / U_{\max}$. Розрахувати також коефіцієнт біжної хвилі за формулою

$$K_{БХ} = \left(1 + \left| \frac{R_n - \rho}{R_n + \rho} \right| \right) / \left(1 - \left| \frac{R_n - \rho}{R_n + \rho} \right| \right)$$

для режимів змішаних хвиль при навантаженні лінії на резистивний опір. Порівняти заміряні і розраховані величини коефіцієнта біжної хвилі.

7.4.3. Частотні характеристики довгих ліній

Метою комп'ютерного моделювання є:

- засвоєння методики вимірювання параметрів довгих ліній;
- дослідження частотних характеристик вхідного опору відрізка лінії в різних режимах роботи.

1. Скласти схему для вимірювання вхідного опору (рис. 7.19).

У цій схемі вольтметр і амперметр вимірюють вхідні струм і напругу (діючі значення) I , U . За цими даними розраховується повний опір $Z = U/I$. Кероване струмом джерело E виробляє напругу пропорційну струму, яка подається на вхід А осцилографа. На другий вхід В подається вхідна напруга лінії. За осцилограмами можна визначити зсув фаз між напругою і струмом φ , як описано в підрозд. 2.6.1, і розрахувати активну і реактивну складові вхідного опору лінії:

$$R = (U/I) \cos \varphi, \quad X = (U/I) \sin \varphi.$$

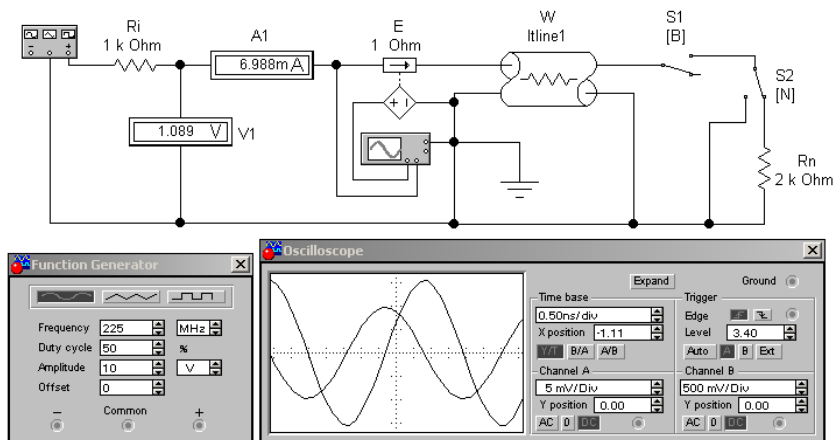


Рис. 7.19

2. Зняти частотні характеристики повного опору і його активної і реактивної складових. Для цього потрібно змінювати частоту і для кожної частоти вимірювати струм, напругу і зсув фаз між ними. За цими даними розраховувати складові вхідного опору. Частотні характеристики знімати для чвертьхвильового відрізка довгої лінії в режимах, коли вихід лінії навантажено на опір, який дорівнює хвильовому опору лінії; опір навантаження вдвічі більше і менше хвильового опору; вихід лінії розімкнено; вихід лінії закорочено. порівняти експериментально зняті частотні характеристики з теоретичними (див. рис. 7.15).

7.5. Підсумки і самоконтроль

Процеси у колах з розподіленими параметрами є хвильовими і відрізняються тим, що вони перебігають не лише в часі, а й у просторі. Це потребує в читача певної просторової уяви. Тому метою цього розділу є досягнення розуміння хвильових процесів, без чого не може обійтися фахівець у галузі радіотехніки. У розділі на прикладі довгих ліній виведено рівняння, які описують хвильові процеси, і знайдено їх розв'язок, на основі чого проаналізовано хвильові процеси в різних режимах. Розглянуті технічні застосування довгих ліній і конструктивні особливості пристроїв, що їх використовують.

Введено такі важливі поняття, як погонні параметри, хвильовий опір; коефіцієнти фази, згасання і поширення хвилі, фазова швидкість; біжні, стійні та змішані хвилі; коефіцієнт відбиття, коефіцієнти біжної та стійної хвилі; фідер, чвертьхвильовий трансформатор. Кола з розподіленими параметрами і хвильові процеси в них розглянуто також у літературі [2, гл. 6], [4, гл. 10], [5, гл. 3], [8, гл. 16, 17], [9, гл. 10], [12, гл. 8]. Закріпити та проконтролювати знання з тематики цього розділу допоможуть подані далі запитання і завдання.

- Які кола називаються розподіленими? Що таке довга лінія?
- Коли в лінії виникає режим біжних хвиль? Як описуються такі хвилі?
- Що таке хвильовий опір, коефіцієнти поширення, згасання і фази, фазова швидкість?
- Зобразіть розподіл миттєвих значень і амплітуд напруги та струму в лінії із втратами в режимі біжних хвиль.
- За яких граничних умов у лінії виникає режим стійних хвиль? Чим він характерний і як описуються такі хвилі?
- Запишіть рівняння для комплексних амплітуд напруги і струму в лінії без втрат. Виведіть з них вирази для комплексних амплітуд і миттєвих значень напруги і струму в режимі стійних хвиль за різних граничних умов. Побудуйте розподіл амплітуд і миттєвих значень напруги і струму в лініях із замкненим і розімкненим кінцями, а також навантажений на реактивний опір.
- Коли в лінії виникає режим змішаних хвиль? Чим він характеризується?
- Що таке коефіцієнт відбиття, коефіцієнти біжної і стійної хвилі?
- Чому у фідері бажаним є режим біжної хвилі?
- Що означає узгодження навантаження з лінією і що є умовою узгодження?
- Що таке чвертьхвильовий трансформатор, де він використовується і які має параметри?
- На чому базується використання відрізків довгих ліній як реактивностей і резонансних кіл? Коли вони використовуються і які мають конструктивні переваги?

РОЗДІЛ 8. НЕЛІНІЙНІ КОЛА

8.1. Рівняння, параметри та характеристики нелінійних кіл

8.1.1. Параметри і характеристики нелінійних компонентів

Згідно з визначенням, наведеним у п. 2.5.1, нелінійним називається коло, в якого хоча б один параметр залежить від величини струму або напруги. Тепер слід уточнити, якими параметрами описуються нелінійні кола. Нагадаємо, що параметри лінійних кіл визначаються як відношення певних фізичних величин див. (2.4, 2.5, 2.8, 2.12, 2.17, 2.18).

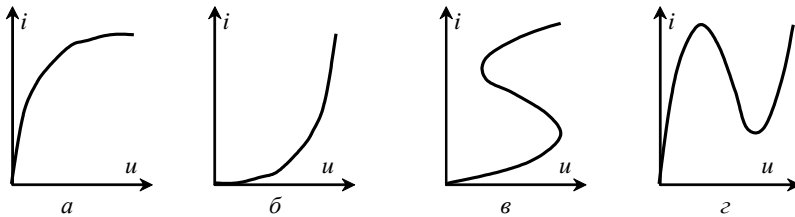


Рис. 8.1

Оскільки в лінійних колах всі величини пропорційні, вказані параметри постійні. Нелінійні ж компоненти відрізняються тим, що в них струми, напруги, заряди, поточкозчеплення непропорційні і залежності між ними мають більш складний — нелінійний вигляд. Так, на рис. 8.1 показано основні типи ВАХ нелінійних резисторів: *а* — з насиченням за струмом; *б* — з насиченням за напругою; *в* — з неоднозначністю за напругою (*S*-подібна); *г* — з неоднозначністю за струмом (*N*-подібна).

Назвемо *статичним опором* відношення напруги до струму в даній точці ВАХ, яка називається робочою точкою (див. рис. 8.2):

$$R_0 = U_0 / I_0.$$

Він дорівнює з урахуванням масштабу тангенсу кута α . При переміщенні робочої точки по ВАХ змінюватиметься кут α , а отже, і R_0 , тобто статичний опір

залежить від струму і напруги. Окрім статичного опору, робоча точка характеризується *диференціальним опором*, визначеним як

$$R_d = du/di.$$

Диференціальний опір дорівнює тангенсу кута β (рис. 8.2) і також змінюється при переміщенні робочої точки. Диференціальні параметри використовуються тоді, коли струми і напруги складаються зі сталих складових і досить малих змінних складових. Такі режими називаються *малосигнальними* і часто мають місце в радіоелектронних колах. Покажемо, що співвідношення між змінними складовими визначаються саме диференціальними параметрами. Нехай ВАХ описується функцією $u = f(i)$. Розклавши її в ряд Тейлора в точці (U_0, I_0) і обмежившись лінійним членом, одержимо

$$u \approx U_0 + \frac{du}{di} \Delta i = R_0 I_0 + R_d \Delta i = U_0 + \Delta u,$$

звідки $\Delta u = R_d \Delta i$, де Δu , Δi — змінні складові напруги і струму. Геометрично це інтерпретується як заміна малого відрізка кривої в околі робочої точки відрізком прямої (рис. 9.3).

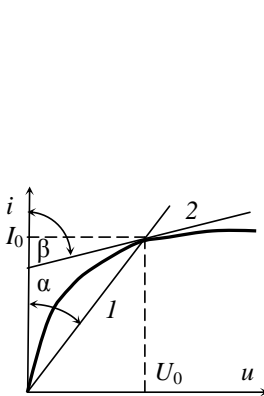


Рис. 8.2

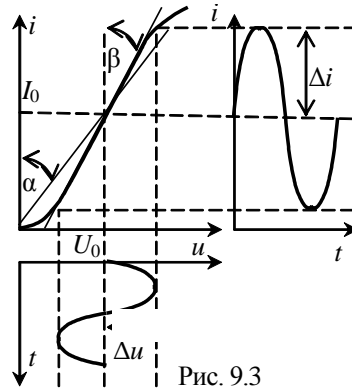


Рис. 8.3

Якщо відома ВАХ резистора і осцилограма його напруги, то осцилограму струму можна побудувати графічно, як показано на рис. 8.3. Із рисунка видно, що змінна складова струму визначається саме диференціальним опором.

Аналогічно визначаються *статичні і диференціальні провідності, ємності, індуктивності*. Отже:

$$G_0 = \frac{I_0}{U_0}, \quad G_d = \frac{di}{du}; \quad C_0 = \frac{Q_0}{U_0}, \quad C_d = \frac{dq}{du}; \quad L_0 = \frac{\Psi_0}{I_0}, \quad L_d = \frac{d\Psi}{di}. \quad (8.1)$$

Зауважимо, що статичні параметри завжди додатні, а диференціальні можуть бути від'ємними. Так, на спадній ділянці ВАХ (див. рис. 8.1 в, г) *диференціальні опори і провідності від'ємні*. Компоненти, що мають від'ємний опір, мають широке застосування в радіоелектронних пристроях.

КМ 8.1. Виконати завдання 1, 2 з підрозділу 8.5.1.

Вольт-амперні характеристики нелінійних компонентів електричних кіл зазвичай отримують експериментально і задають графічно. Тому розрахунки нелінійних кіл часто виконують графічно. Графічний аналіз нелінійних кіл має наочність, проте є громіздким і не дає достатньої точності, притаманой аналітичним методам. Але для застосування аналітичних методів потрібно мати аналітичний опис характеристик нелінійних елементів, котрі звичайно одержують експериментально у вигляді графіків. Тому однією із задач теорії нелінійних кіл є *апроксимація нелінійних характеристик*, тобто знаходження аналітичних виразів, що досить точно описують задані характеристики і є зручними для математичної обробки.

Задача апроксимації має два аспекти: вибір апроксимуючих функцій і визначення параметрів цих функцій, виходячи з певних критеріїв відповідності апроксимуючої функції $\bar{f}(x)$ і апроксимованої залежності $f(x)$. Найбільш часто використовуються кусково-лінійна і *кусково-нелінійна апроксимації*, апроксимації степеневим, експоненціальним і тригонометричним поліномами:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \\ \bar{f}(x) &= b_0 + b_1 \exp(\sigma_1 x) + b_2 \exp(\sigma_2 x) + \dots + b_n \exp(\sigma_n x), \\ \bar{f}(x) &= c_0 + c_1 \cos(x + \varphi_1) + \dots + c_n \cos(nx + \varphi_n). \end{aligned}$$

Як *критерії точності апроксимації* застосовують: точкове наближення, коли $\bar{f}(x_k) = f(x_k)$, де $k = 1, 2, \dots, n$; рівномірне наближення $|f(x) - \bar{f}(x)| \leq \varepsilon$, де ε — задане число; середньоквадратичне наближення

$$\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - \bar{f}(x)]^2 dx} \leq \varepsilon.$$

Кусково-лінійна апроксимація звичайно використовується, коли на ВАХ є ділянки, близькі до прямолінійних. Наприклад, ВАХ напівпровідникового діода (див. рис. 8.4) з достатньою точністю можна замінити ламаною лінією ABC. Відрізок AB описується рівнянням $u = U_0 + R_d i$, де R_d — диференціальний опір у точці A. Це рівняння відповідає двополюсникові (див. рис. 8.5). Таким чином, якщо робоча точка не виходить за межі лінійного відрізка кусково-лінійної апроксимації, нелінійний резистор можна замінити лінійним двополюсником (рис. 8.5), після чого схема стає лінійною і може аналізуватися методами теорії лінійних кіл. Зауважимо, що кусково-лінійна апроксимація є універсальною, бо будь-яку криву можна апроксимувати ламаною, якщо розбити її на досить малі ділянки. Однак зі зростанням числа таких ділянок зростає й громіздкість розрахунків.

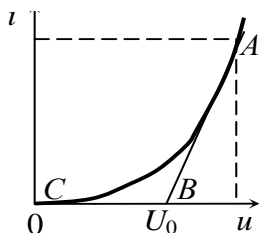


Рис. 8.4

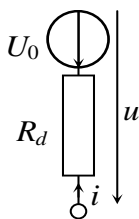


Рис. 8.5

Приклад 8.1. Вхідна напруга стабілізатора (рис. 8.6, а) складається з постійної $U_{\text{вх},0} = 10$ В і змінної складової з амплітудою $U_{\text{вх},m} = 1$ В. Стабілітрон VD типу КС147Г має ВАХ, показану на рис. 8.6, б. Дано: $R = 300$ Ом, $R_{\text{н}} = 1$ кОм. Знайти постійну та змінну складової напруги на виході стабілізатора.

Розв'язання. Апроксимуємо робочий відрізок ВАХ стабілітрона прямою і знаходимо її параметри: $U_0 = 4,7$ В, $R_d = \Delta U / (i_{\text{стmax}} - i_{\text{стmin}}) \approx 20$ Ом. Замінюємо вихідну схему еквівалентною лінійною схемою (рис. 9.7). Застосовуючи теорему накладання, знаходимо

$$U_{\text{н}\approx} = \frac{R_{\text{н}1}}{R + R_{\text{н}1}} U_{\text{вх}\approx}, \quad U_{\text{н}0} = \frac{R_{\text{н}1}}{R + R_{\text{н}1}} U_{\text{вх}0} + \frac{R_{\text{н}2}}{R_d + R_{\text{н}2}} U_0,$$

$$\text{де } R_{\text{н}1} = \frac{R_{\text{н}} R_d}{R_{\text{н}} + R_d}, \quad R_{\text{н}2} = \frac{R R_{\text{н}}}{R + R_{\text{н}}}.$$

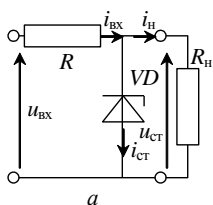


Рис. 8.6

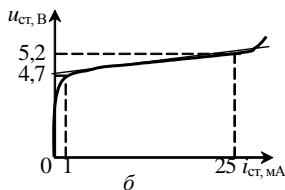
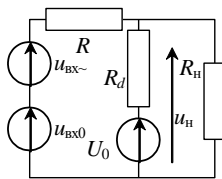


Рис. 8.7



КМ 8.2. Виконати завдання 3 з підрозділу 8.5.1.

При *апроксимації степеневим поліномом* задану характеристику $y = f(x)$

апроксимують виразом $y = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Для визначення коефіцієнтів a_k на робочій ділянці характеристики вибирають $(n + 1)$ -ту точку $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, в яких апроксимуюча крива повинна збігатися з характеристикою. Потім складаються системи рівнянь $y_k = a_0 + a_1 x_k + \dots + a_n x_k^n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, з якої знаходять коефіцієнти a_0, \dots, a_n .

Приклад 8.2. На рис. 8.8 суцільною лінією показано вхідну характеристику транзистора КТ324А. Дано $u_{BE} = u_{BE0} + u_{BE\approx}$, де стала складова $u_{BE0} = 0,4$ В і змінна складова $u_{BE\approx} = 0,1 \cos \omega t$ В. Апроксимувати робочий відрізок характеристики поліномом другого степеня.

Розв'язання. Робочий відрізок обмежений такими значеннями напруги: $u_{BE\min} = u_{BE0} - u_{BE\approx} = 0,3$ В, $u_{BE\max} = u_{BE0} + u_{BE\approx} = 0,5$ В. Апроксимуючий поліном має такий вигляд:

$$i_B = i_{B0} + \sigma_1 (u_{BE} - u_{BE0}) + \sigma_2 (u_{BE} - u_{BE0})^2. \quad (8.2)$$

Як точки збігу вибираємо початкову і граничні точки з координатами (див. рис. 9.8): $(0,8; 0,3)$, $(2,0; 0,4)$, $(4,5; 0,5)$. Підставивши ці значення і $u_{BE0} = 0,4$ В в (9.2), одержимо систему таких рівнянь:

$$0,8 = i_{B0} - 0,1\sigma_1 + 0,01\sigma_2, \quad 2,0 = i_{B0}, \quad 4,5 = i_{B0} + 0,1\sigma_1 + 0,01\sigma_2,$$

звідки знаходимо $i_{B0} = 2,0$ мкА, $\sigma_1 = 18,5$ мкА/В, $\sigma_2 = 65$ мкА/В², отже,

$$i_B = 2,0 + 18,5(u_{BE} - 0,4) + 65(u_{BE} - 0,4)^2. \quad (8.3)$$

Апроксимуючу криву, побудовану за виразом (8.3), показано на рис. 9.8 пунктиром.

КМ 8.3. Апроксимувати ВАХ випрямного діода, зняту у п. 1 підрозділу 8.5.1 степеневим поліномом другого степеня, як у прикл. 8.2.

Приклад 8.3. Відомо, що ВАХ p - n -переходу описується функцією $i = i_s [\exp(u/u_T) - 1]$, де i_s — зворотний струм, u_T — тепловий потенціал. Показати, що вхідна характеристика транзистора (див. рис. 8.8) може бути апроксимована такою функцією, і знайти її параметри.

Розв'язання. Зазвичай прямий струм набагато більший, ніж зворотний i_s , тому можна прийняти $i = i_s [\exp(u/u_T)]$. Оскільки $\ln i = \ln i_s + u/u_T$, то в координатах $\ln i = f(u)$ графіком цієї функції є пряма. Щоб переконатись у придатності цієї функції для апроксимації характеристики (див. рис. 8.8), треба останню також побудувати в координатах $\ln i_E = f(u_{BE})$. На рис. 8.9 показано точки, що належать цій характеристиці. Як бачимо, ці точки добре лягають на пряму $\ln i_B = \ln i_s + u_{BE}/u_T$. Беручи $u_{BE} = 0$, знаходимо за графіком $\ln i_s = -2,45$, $i_s = 0,086$ мкА. Далі, підставивши $\ln i_B = 1,5$; $u_{BE} = 0,5$ В, знаходимо $U_T = 0,127$ В. Таким чином, характеристика апроксимується виразом, мкА: $i_B = 0,086 \exp(u_{BE}/0,127)$. Точки, розраховані за цією формулою, показано на рис. 8.8 хрестиками.

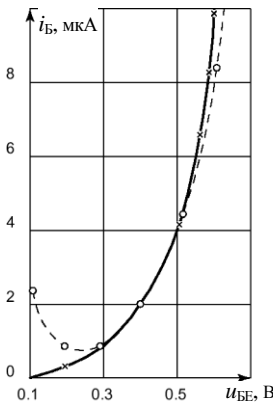


Рис. 8.8

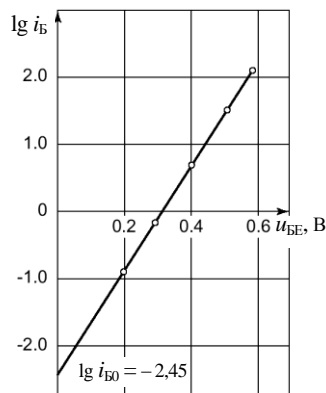


Рис. 8.9

КМ 8.4. Апроксимувати ВАХ випрямного діода, зняту у п. 1 підрозділу 8.5.1, функцією $i = i_s [\exp(u/u_T)]$, як у прикладі 8.3. Для цього побудувати

ВАХ у координатах $\ln i = f(u)$ і визначити параметри апроксимуючої функції.

8.1.2. Рівняння нелінійних схем

Аналіз нелінійних кіл ведеться у тій самій послідовності, що й лінійних: складається, а потім розв'язується повна система рівнянь схеми. Оскільки закони Кірхгофа застосовні до будь-яких зосереджених кіл — лінійних і нелінійних, відмінність полягає в тому, що елементні рівняння не є лінійними і зазвичай задаються графічно у вигляді ВАХ. Тому і розв'язання рівнянь нелінійних кіл часто проводиться графічно. Проілюструємо це прикладом. Складемо систему рівнянь схеми (див. рис. 8.10), що являє собою послідовне з'єднання лінійного R і нелінійного r опорів і джерела E : $E - u_R - u = 0$, $u_R = Ri$, $u = f(i)$, причому останнє рівняння — ВАХ опору r задано графічно (крива 1, рис. 8.11). Виключивши u_R , одержимо систему рівнянь: $E = Ri + u$, $u = f(i)$, розв'язання якої знаходимо графічно. Для цього будемо графік першого рівняння — пряму 2, перетин якої з кривою 1 визначає розв'язок системи рівнянь схеми — *робочу точку* A із шуканими струмом I_0 напругою U_0 нелінійного опору. Напругу на лінійному опорі U_{R0} знаходять як різницю E та U_0 . Потужність у нелінійному опорі $P_0 = U_0 I_0$, тому графічно вона дорівнює заштрихованій на рис. 8.11 площі, помноженій на m_u , m_i — масштаби за віссю напруги і струмів відповідно. Пряма 2 називається *навантажувальною*. Для її побудови, як видно з рис. 8.11, по осі u відкладають напругу джерела E , а по осі i — значення E/R .

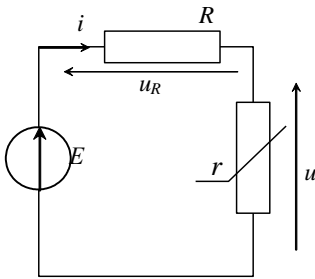


Рис. 8.10

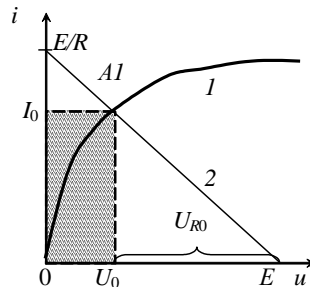


Рис. 8.11

КМ 8.5. У схемі, зображеній на рис. 8.42, ввімкнути джерело постійної напруги 10 В послідовно з опором R_1 і стабілітроном VD_3 . На ВАХ стабілітрона побудувати навантажувальну пряму і визначити струм і напругу стабілітрона у робочій точці. Порівняти розраховані і виміряні величини струму і напруги.

Приклад 8.4. Розрахувати струми і напруги в елементах *параметричного стабілізатора напруги* (див. рис. 8.12), складеного із джерела вхідної напруги E , лінійного резистора R і *стабілітрона* VD , ВАХ якого показано на рис. 8.13 (крива 1). Пояснити роботу стабілізатора.

Розв'язання. Нехай вхідна напруга дорівнює $U_{BX,1}$. Будуємо навантажувальну пряму 2 і знаходимо робочу точку C . Змінимо вхідну напругу до величини $U_{BX,2}$. Нова навантажувальна пряма 3 пройде паралельно до прямої 2, оскільки нахил навантажувальної прямої визначається величиною опору R , яка залишається сталою. Таким чином, при зміні вхідної напруги на величину ΔU_{BX} робоча точка переміститься з точки C у B , і вихідна напруга зміниться на величину $\Delta U_{ВНХ}$. Як видно з рис. 9.13, $\Delta U_{ВНХ} \ll \Delta U_{BX}$, що і становить ефект стабілізації. Ступінь стабілізації оцінюється *коефіцієнтом стабілізації* $k = \Delta U_{BX} / \Delta U_{ВНХ}$.

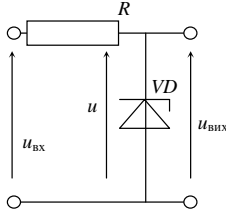


Рис. 8.12

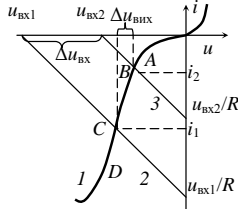


Рис. 8.13

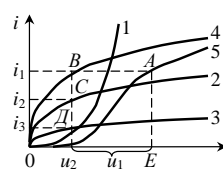


Рис. 8.14

КМ 8.6. У завданні КМ 8.5 змінити напругу джерела до 15 В. Визначити струм і напругу в новій робочій точці, а також прирощення вихідної напруги $\Delta U_{ВНХ}$ при зміні вхідної напруги $\Delta U_{BX} = 5$ В. Розрахувати коефіцієнт стабілізації за формулою $k = \Delta U_{BX} / \Delta U_{ВНХ}$.

Графічний метод аналізу застосовується і до складніших схем. Розглянемо, наприклад, схему зі змішаним з'єднанням нелінійних опорів (рис. 8.15, а). ВАХ опорів R_1 , R_2 , R_3 наведено на рис. 8.14 (криві 1, 2, 3). Побудуємо ВАХ еквівалентного двополюсника R_4 , утвореного паралельним з'єднанням опорів R_2 , R_3 . Оскільки його струм $i_1 = i_2 + i_3$, еквівалентна ВАХ (крива 4,

рис. 8.14) будується додаванням струмів ВАХ 2 і 3 для фіксованих значень напруги (крива 4).

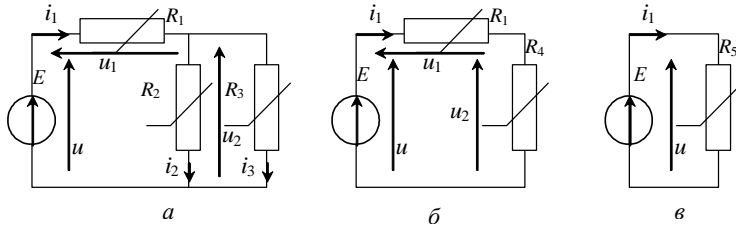


Рис. 8.15

Заміна опорів R_2 , R_3 опором R_4 приводить до еквівалентної схеми (рис. 8.15, *б*). Опори R_1 і R_4 також можна замінити еквівалентним опором R_5 . При цьому еквівалентна ВАХ (крива 5) будується шляхом додавання напруг ВАХ 1 і 4 для однакових значень струму. В результаті одержуємо еквівалентну схему (рис. 8.15, *в*). Для $u = E$ за допомогою ВАХ 5 знаходимо струм i_1 (точка *A*, рис. 8.14). Цей струм тече через R_4 . Тому на ВАХ 4 у точці *B* маємо напругу u_2 . Потім за напругою u_2 за допомогою ВАХ 2 і 3 знаходимо струми i_2 і i_3 (точки *C* і *D*). Цей приклад демонструє застосування методу еквівалентних перетворень до нелінійних кіл.

КМ 8.7. У схемі, зображеній на рис. 8.42, замінити стабілітрон VD3 послідовним з'єднанням двох таких стабілітронів і зняти еквівалентну ВАХ. Побудувати еквівалентну ВАХ шляхом додавання двох ВАХ одного стабілітрона за напругою. Порівняти зняту ВАХ з побудованою графічно ВАХ.

8.1.3. Характеристики і параметри нелінійних багатополюсних елементів

Основу сучасних радіоелектронних кіл становлять транзистори — біполярні та польові. Знаходять застосування також електронні лампи. Ці електронні прилади — багатополюсники. Дотепер розглядалися двополюсники, електромагнітний стан яких описувався одним рівнянням, яке містить один струм і одну напругу. Постає питання: скільки струмів і напруг характеризують електромагнітний стан багатополюсника і скільки потрібно елементарних рівнянь, щоб визначити залежності поміж цими струмами і напругами. Розглянемо n -полюсник (див. рис. 8.16). Кожен полюс характеризується струмом і напругою, вимірюваною відносно деякого базисного вузла. Оскільки один із струмів полюсів можна виразити за допомогою ЗКС через решту струмів, n -полюсник характеризується $(n - 1)$ струмами. Базисним може бути один із полюсів, наприклад n -й, як показано на рис. 8.16. Тоді режим n -полюсника визначатиметься $(n - 1)$ напругою. Таким чином, електромагнітний стан n -полюсника можна описати $(n - 1)$ струмом і $(n - 1)$ напругою. Взагалі струм кожного полюса залежить від напруг усіх полюсів: $i_k = Y(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$. Це є елементарні рівняння багатополюсника, і їх кількість дорівнює $(n - 1)$. Так, триполюсник описується рівняннями: $i_1 = Y_1(u_1, u_2)$, $i_2 = Y_2(u_1, u_2)$. Ці рівняння можна розв'язати відносно будь-якої пари змінних:

$$\begin{aligned} u_1 &= Z_1(i_1, i_2), \quad u_2 = Z_2(i_1, i_2); \quad u_1 = H_1(i_1, u_2), \quad i_2 = H_2(i_1, u_2); \\ i_1 &= F_1(u_1, i_2), \quad u_2 = F_2(u_1, i_2); \quad u_1 = A_1(u_2, i_2) \quad i_1 = A_2(u_2, i_2). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Окрім того, як базисний може бути вибраним кожен із n полюсів. Як бачимо, зі збільшенням числа полюсів опис n -полюсника ускладнюється. Проте всі системи рівнянь еквівалентні поміж собою, отже, досить мати одну з них, щоб визначити інші. Залежності (8.4) нелінійних багатополюсників звичайно знімають експериментально і подають графічно. Щоб зобразити функцію двох змінних на площині, роблять таким чином. Фіксують величину одного з аргументів і будують графіки залежності від другого аргументу, одержуючи сім'ю характеристик. Фіксований аргумент називають *параметром сім'ї*.

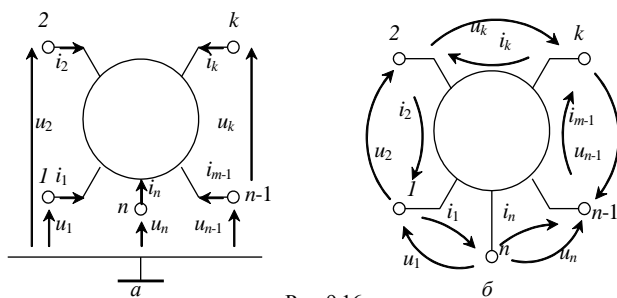


Рис. 8.16

Характеристики біполярних транзисторів звичайно знімають у координатах

$$u_{BE} = H_{E1}(i_B, u_{KE}), \quad i_K = H_{E2}(i_B, u_{KE}), \quad (8.5)$$

при вимірюванні напруги відносно емітера (рис. 9.17, а) — схема зі спільним емітером, або

$$u_{BE} = H_{B1}(i_E, u_{KB}), \quad i_K = H_{B2}(i_E, u_{KB}), \quad (8.6)$$

при вимірюванні напруги відносно бази (рис. 8.17, б) — схема зі спільною базою. На рис. 8.18 показано сім'ю входних характеристик транзистора $u_{BE} = H_{E1}(i_B, u_{KE})$, де u_{KE} — параметр сім'ї. Маючи ці характеристики, можна графічно побудувати сім'ю характеристик зворотної передачі $u_{BE} = H_{E1}(i_B, u_{KE})$, де i_B — параметр.

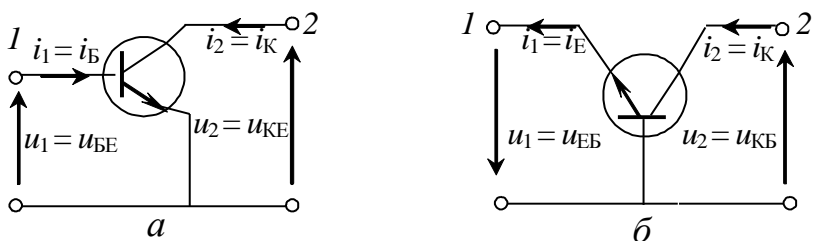


Рис. 8.17

На рис. 8.19 показано сім'ю вихідних характеристик $i_K = H_{E2}(i_B, u_{KE})$, де i_B — параметр, і сім'ю характеристик прямої передачі $i_K = H_{E2}(i_B, u_{KE})$, де u_{KE} — параметр. Ці дві сім'ї також можуть бути перераховані одна в одну. Таким чином, достатньо мати сім'ї вхідних і вихідних характеристик. Інші дві сім'ї можна за необхідності побудувати.

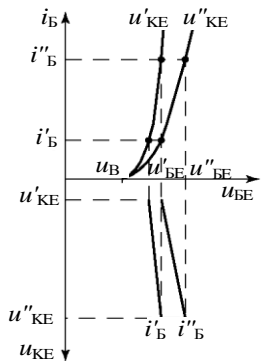


Рис. 8.18

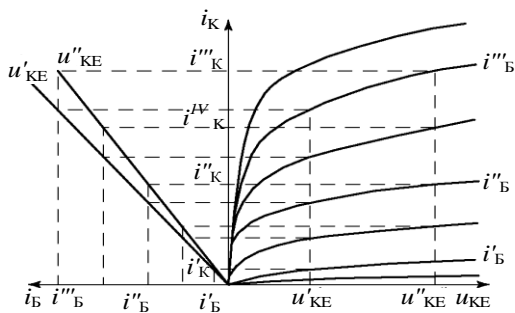


Рис. 8.19

КМ 8.8. Виконати п. 1, 2 з підрозділу 8.5.2.

Характеристики польових транзисторів зручно побудувати в координатах

$$i_3 = Y_{B1}(u_{3B}, u_{CB}), \quad i_C = Y_{B2}(u_{3B}, u_{CB}) \quad (8.7)$$

для схем зі спільним витоком (рис. 8.20). Проте струм затвору i_3 зазвичай дуже малий, тому перше рівняння можна вважати, що воно дорівнює нулеві. Сім'ю вихідних характеристик $i_C = Y_{B2}(u_{3B}, u_{CB})$, де u_{3B} — параметр, показано на рис. 8.21, а. Відповідні характеристики прямої передачі для польових транзисторів з (p - n)-переходом (рис. 8.20, а) та з ізолюваним затвором і вбудованим каналом (рис. 8.20, б) показано на рис. 9.21, б, а для транзисторів з ізолюваним затвором і наведеним каналом (рис. 8.20, в) — на рис. 8.21, в.

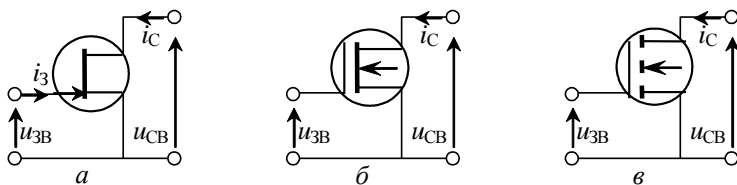


Рис. 8.20

Суттєвою відмінною характеристик транзисторів із вбудованими та наведеними каналами є те, що в останніх характеристики прямої передачі зміщені праворуч, так що при нульовій напрузі на затворі струм через них не тече, тоді як у транзисторів з $(p-n)$ -переходом і транзисторів із вбудованим каналом струм при нульовому зміщенні на затворі тече і припиняється при зміщенні на затворі, що дорівнює напрузі відсічки U_B (рис. 8.21, б).

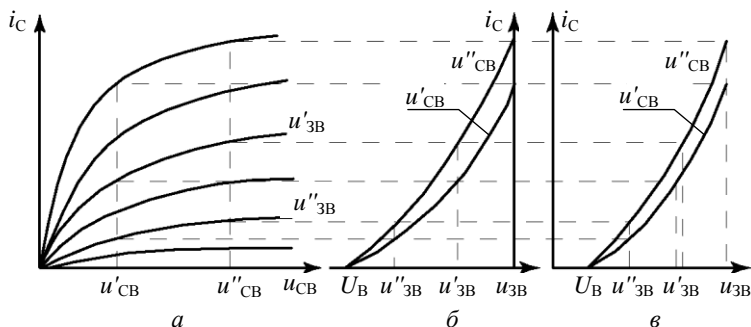


Рис. 8.21

КМ. 8.9. Виконати п. 1, 2 з підрозділу 8.5.3.

Для нелінійних багатополісників також можна визначити *статичні* і *диференціальні параметри* у заданій робочій точці. Диференціальні параметри визначають, розкладаючи в ряд Тейлора відповідні рівняння багатополісника і обмежуючись лінійними членами. Так, для рівнянь (8.5) маємо

$$u_{BE} \approx H_{E1}(i_{B0}, u_{KE0}) + \frac{\partial u_{BE}}{\partial i_B} di_B + \frac{\partial u_{BE}}{\partial u_{KE}} du_{KE} = u_{BE0} + du_{BE},$$

$$i_K \approx H_{E2}(i_{B0}, u_{KE0}) + \frac{\partial i_K}{\partial i_B} di_B + \frac{\partial i_K}{\partial u_{KE}} du_{KE} = i_{K0} + di_K.$$

Вважаючи, що змінні складові дорівнюють диференціалам, тобто $i_{B\approx} = di_B$, $u_{KE\approx} = du_{KE}$ тощо, одержимо:

$$u_{BE\approx} = h_{11E} i_{B\approx} + h_{12E} u_{KE\approx}, \quad i_{K\approx} = h_{21E} i_{B\approx} + h_{22E} u_{KE\approx},$$

$$h_{11E} = \frac{\partial u_{BE}}{\partial i_B}, \quad h_{12E} = \frac{\partial u_{BE}}{\partial u_{KE}}, \quad h_{21E} = \frac{\partial i_K}{\partial i_B}, \quad h_{22E} = \frac{\partial i_K}{\partial u_{KE}}. \quad (8.8)$$

Ці диференціальні параметри називаються h -параметрами схеми зі спільним емітером. Зазвичай індекс \sim опускають і рівняння для змінних складових записують у вигляді

$$u_{BE} = h_{11E} i_B + h_{12E} u_{KE}, \quad i_K = h_{21E} i_B + h_{22E} u_{KE}. \quad (8.9)$$

Хоч у (8.5) і (8.9) струми і напруги позначені однаково, смисл їх різний. Слід усвідомлювати, що в нелінійних рівняннях (8.5) — це повні струми і напруги, а в лінійних рівняннях (8.9) — лише малі змінні складові цих струмів і напруг, тож самий вигляд рівнянь показує, про які величини йде мова. Аналогічно на основі рівнянь (8.4) можна одержати рівняння з u -параметрами та z -параметрами:

$$i_B = y_{11E} u_{BE} + y_{12E} u_{KE}, \quad i_K = y_{21E} u_{BE} + y_{22E} u_{KE};$$

$$u_{BE} = z_{11E} i_B + z_{12E} i_K, \quad u_{KE} = z_{21E} i_B + z_{22E} i_K.$$

Із (8.6) можна вивести рівняння з h -параметрами для схеми зі спільною базою:

$$u_{BE} = h_{11B} i_E + h_{12B} u_{KB}, \quad i_K = h_{21B} i_E + h_{22B} u_{KB}.$$

КМ 8.10. Виконати п. 3 з підрозділу 8.5.2.

Для польових транзисторів з (8.7) одержують рівняння з u -параметрами:

$$i_C = y_{21B} u_{3B} + y_{22B} u_{CB}.$$

Фізичний смисл диференціальних параметрів можна з'ясувати за допомогою рівнянь, до яких вони входять. Наприклад, беручи в (8.9) $u_{KE} = 0$, знаходимо: $h_{11E} = u_{BE}/i_B$, $h_{21E} = i_K/i_B$. Отже, h_{11E} являє собою вхідний опір змінному струму, а h_{21E} — це коефіцієнт передачі струму в схемі зі спільним емітером за умови, що змінна складова напруги u_{KE}

дорівнює нулю, тобто при сталій напрузі між колектором і емітером. Аналогічно можна розглянути інші параметри. Іноді для параметрів транзисторів застосовують спеціальні позначення: $h_{21E} = \beta$, $h_{21B} = \alpha$, $y_{21B} = S$, $y_{22B} = G_i$. Диференціальні параметри можна знаходити за допомогою сімей характеристик. Для цього потрібно виразити параметр через відношення приростів відповідних величин і відшукати ці прирости на характеристиках, як показано в наступному прикладі.

КМ 8.11. Виконати п. 3 з підрозділу 8.5.3.

Приклад 8.5. Знайти h -параметри схеми зі спільним емітером за допомогою вихідних (див. рис. 8.18) і вхідних (див. рис. 8.19) характеристик.

Розв'язання. Згідно з (8.8)

$$\begin{aligned} h_{11E} &\approx \Delta u_{BE} / \Delta i_B, h_{21E} \approx \Delta i_K / \Delta i_B, u_{KE} = \text{const}; \\ h_{12E} &\approx \Delta u_{BE} / \Delta u_{KE}, h_{22E} \approx \Delta i_K / \Delta u_{KE}, i_B = \text{const}. \end{aligned}$$

На вхідних і вихідних характеристиках знаходимо відповідні прирости струмів і напруг:

$$h_{11E} = \frac{u''_{BE} - u'_{BE}}{i''_B - i'_B}, \quad h_{21E} = \frac{i''_K - i'_K}{i''_B - i'_B}, \quad h_{12E} = \frac{u''_{BE} - u'_{BE}}{u''_{KE} - u'_{KE}}, \quad h_{22E} \approx \frac{i''_K - i'_K}{u''_{KE} - u'_{KE}}.$$

8.2. Електричні кола в режимі постійних струмів

Розрахунки електронних кіл у *режимі постійних струмів* починають зі складення розрахункової схеми. Для цього у вихідній схемі вимикають конденсатори, а котушки замінюють опорами сталому струмові або ж замикають, якщо останніми можна знехтувати. Як приклад на рис. 8.22, б, 8.23, б, 8.24, б показано схеми для аналізу режиму постійних струмів у схемах, зображених на рис. 8.22, а; 8.23, а; 8.24, а відповідно.

Розрахунки в режимі постійних струмів бувають двох видів: аналіз, коли задані параметри й характеристики елементів схеми, напруги джерел живлення, а треба знайти струми, напруги, потужності, що визначають *статичний режим* постійних струмів; і синтез, коли задано струми й напруги у статичному режимі, а треба розрахувати параметри елементів схеми, що забезпечують такий режим.

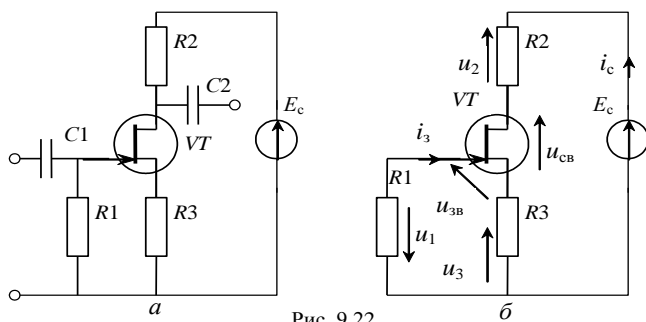


Рис. 9.22

ис. 8.22

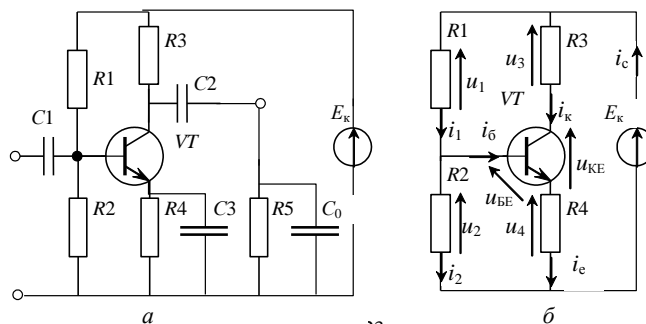


Рис. 8.23

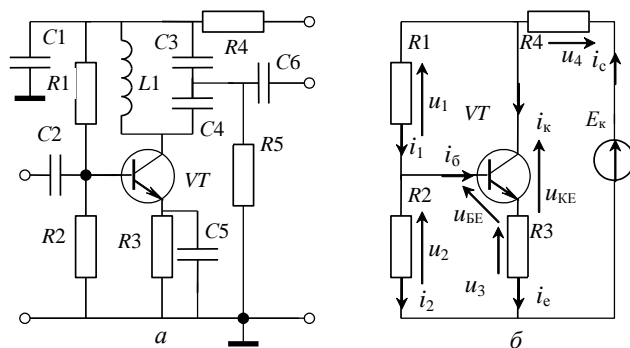


Рис. 8.24

Приклад 8.6. Розрахувати струми, напруги, потужності елементів підсилювального каскаду на польовому транзисторі (див. рис. 8.22, *а*), якщо задано величини E_c, R_1, R_2, R_3 і сім'ю вихідних характеристик (див. рис. 8.25, *б*).

Розв'язання Будемо схему для режиму постійних струмів (див. рис. 8.22, *б*). У польових транзисторів струм затвору нехтовно малий, тому покладемо $i_3 = 0, u_1 = 0$. Складемо повну схему рівнянь:

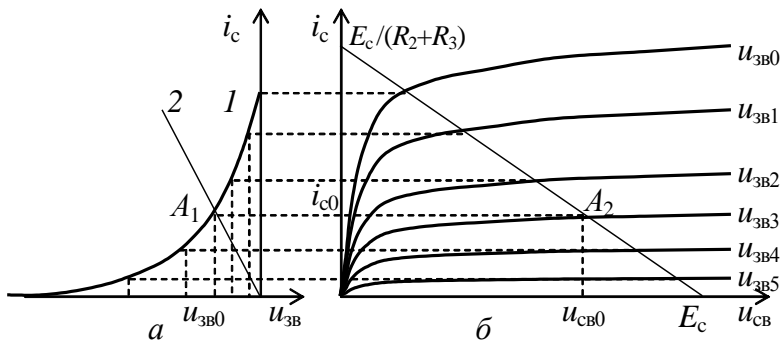
$$u_3 + u_{3B} = 0, \quad E_c - u_3 - u_{CB} - u_2 = 0,$$

$$u_2 = R_2 i_C, u_3 = R_3 i_C, i_C = f_C(u_{3B}, u_{CB}).$$

Оскільки останнє рівняння задане графічно як сім'я вихідних характеристик (див. рис. 8.25, *б*), аналіз будемо вести графічно. Для цього будемо навантажувальну пряму, що описується рівнянням $E_c - u_{CB} - (R_2 + R_3)i_C = 0$. Робоча точка розташована в місці перетину її з однією з кривих сім'ї вихідних характеристик. Щоб визначити, з якою саме, потрібно знати напругу зміщення на затворі u_{3B} . Цю напругу знайдемо з рівнянь:

$$u_3 + u_{3B} = 0, \quad u_3 = R_3 i_C, \quad i_C = f(u_{3B}). \quad (8.10)$$

Останню залежність (див. рис. 9.25, *а*, крива 1) будемо графічно: координати цього графіка i_C, u_{3B} знаходимо у точках перетину навантажувальної прямої з кривими сім'ї вихідних характеристик. Систему рівнянь (8.10) розв'яжемо графічно. Для цього будемо прямою 2, що описується рівнянням $R_3 i_C + u_{3B} = 0$ (рис. 9.25, *а*) і в точці A_1 її перетину з кривою 1 знаходимо u_{3B0} та i_{C0} . Це дає можливість визначити робочу точку A_2 на навантажувальній прямій і знайти напругу u_{CB0} . Далі знаходимо напруги $u_{20} = R_2 i_{C0}, u_{30} = R_3 i_{C0}$, а також потужності $P_2 = R_2 i_{C0}^2, P_3 = R_3 i_{C0}^2, P_T = u_{CB0} i_{C0}$.



КМ 8.12. Виконати п. 4, 5 з підрозділу 8.5.4.

Приклад 8.7. Проаналізувати в режимі постійних струмів підсилювальний каскад на біполярному транзисторі (див. рис. 9.23, а). Задано параметри R_1, R_2, R_3, R_4, E_k і сім'ю вихідних характеристик (див. рис. 9.26, б).

Розв'язання. Складаємо схему (див. рис. 9.23, б), для якої складаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} i - i_1 - i_K &= 0, \quad i_1 - i_2 - i_B = 0, \quad i_B + i_K = i_E, \quad i_K = f_1(i_B, u_{KE}), \\ E_K - u_1 - u_2 &= 0, \quad E_K - u_3 - u_{KE} - u_4 = 0, \quad u_2 - u_{BE} - u_4 = 0, \\ u_{BE} &= f_2(i_B, u_{KE}), \quad u_1 = R_1 i_1, \quad u_2 = R_2 i_2, \quad u_3 = R_3 i_K, \quad u_4 = R_4 i_E. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Графічне розв'язання системи (8.11) ведуть у такій послідовності. На вихідній сім'ї характеристик (див. рис. 8.26, б) будують навантажувальну пряму за рівнянням $E_K - u_{KE} - (R_3 + R_4)i_K = 0$. Потім будують залежність $i_K = f_3(i_B)$ (рис. 8.26, а, крива 1). Для знаходження початкової робочої точки слід визначити струм бази i_{B0} . З цією метою розглянемо схему кола бази (рис. 8.27, а), яку за теоремою про еквівалентний генератор перетворимо у схему, зображену на рис. 8.27, б, де $E_B = E_K \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $R_B = \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}$. Ця схема описується рівняннями: $(E_B - u_{BE}) - R_B i_B - u_4 = 0$, $u_4 = R_4 i_K$, $i_K = f_3(i_B)$, причому графік останнього рівняння побудовано на рис. 8.26, а (крива 1). Для розв'язання цієї системи будуємо пряму 2 за рівнянням $(E_B - u_{BE}) - R_B i_B - R_4 i_K = 0$. Точка A_1 перетину прямої 2 з кривою 1 визначає величини i_{B0}, i_{K0} , а також положення робочої точки A_2 на навантажувальній прямій, в котрій знаходимо u_{KE0} . Далі визначаємо:

$$\begin{aligned} u_{30} &= R_3 i_{K0}, \quad u_{40} = R_4 i_{E0}, \quad i_{E0} = i_{B0} + i_{K0} \approx i_{K0}, \quad u_{20} = R_2 i_{B0}, \\ i_{20} &= u_{20} / R_2, \quad i_{10} = i_{B0} + i_{20}, \quad u_{10} = R_1 i_{10}, \quad i_0 = i_{10} + i_{K0}. \end{aligned}$$

Цю задачу можна також розв'язати без графічних побудов, якщо взяти до уваги деякі особливості характеристик біполярних транзисторів, а саме: 1) в активному режимі роботи транзистора u_{BE} мало залежить від i_B та u_{KE} (див. рис. 8.18); отже, можна вважати $u_{BE} \approx \text{const}$ ($u_{BE} = 0,3\text{--}0,6$ В у германієвих та $0,6\text{--}0,8$ В — у кремнієвих транзисторів); 2) залежність i_K від i_B близька до лінійної і i_K мало залежить від u_{KE} (див. рис. 8.19). Тому беремо $i_K = \beta i_B$, де

β — коефіцієнт передачі струму бази. Тоді отримаємо замість (8.11) систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} i - i_1 - i_K &= 0, \quad i_1 - i_2 - i_B = 0, \quad i_B + i_K = i_E, \quad i_K = \beta i_B, \quad E_K - u_1 - u_2 = 0, \\ E_K - u_3 - u_{KE} - u_4 &= 0, \quad u_2 - u_{BE} - u_4 = 0, \quad u_{BE} = U_{BE}, \quad u_1 = R_1 i_1, \\ u_2 &= R_2 i_2, \quad u_3 = R_3 i_K, \quad u_4 = R_4 i_E. \end{aligned}$$

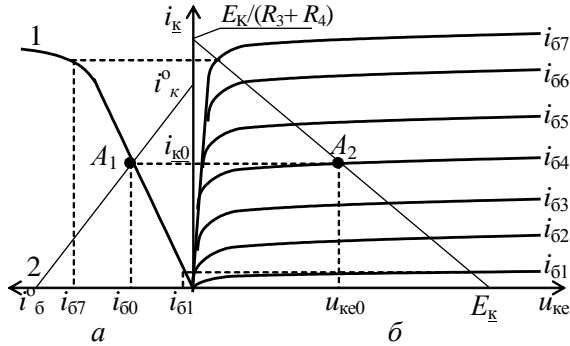


Рис. 8.26

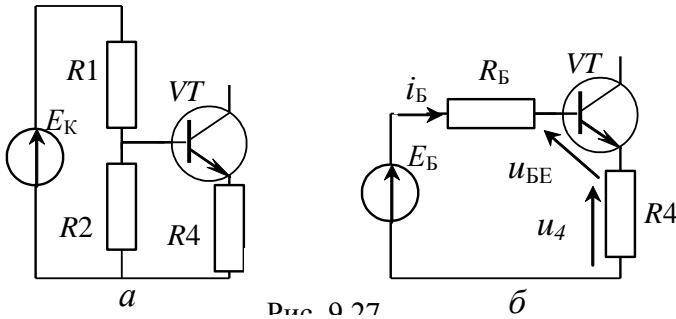


Рис. 8.27

Виключаючи i_1, i_E, u_1, u_3, i , знаходимо

$$\begin{aligned} i_2 &= (E_K - R_1 i_B) / (R_1 + R_2), \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (E_K - R_1 i_B), \quad u_4 = u_2 - u_{BE}, \\ i_K &= \frac{u_4}{R_4} - i_B, \quad u_{KE} = E_K - R_3 i_K - u_4, \quad i_B = i_K / \beta, \end{aligned} \quad (8.12)$$

звідки знаходимо
$$i_{\text{Б}} = \frac{E_{\text{К}} R_2 + (R_1 + R_2) U_{\text{БЕ}}}{(\beta + 1)(R_1 + R_2) R_4 + R_1 R_2}.$$

Далі за рівняннями (9.12) розрахуємо решту струмів і напруг:

$$\begin{aligned} i_{\text{К}} &= \beta i_{\text{Б}}, \quad i_{\text{Е}} = (\beta + 1) i_{\text{Б}}, \quad u_4 = R_4 i_{\text{Е}}, \quad u_2 = u_4 + u_{\text{БЕ}}, \quad i_2 = u_2 / R_2, \\ i_1 &= i_2 + i_{\text{Б}}, \quad i = i_1 + i_{\text{К}}, \quad u_3 = R_3 i_{\text{К}}, \quad u_1 = R_1 i_1, \quad u_{\text{КЕ}} = E_{\text{К}} - u_3 - u_4. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Розрахунок ще спрощується, якщо знехтувати струмом бази $i_{\text{Б}}$. Це допустимо, якщо $i_{\text{Б}} \ll i_2$. Тоді

$$\begin{aligned} i_2 &= E_{\text{К}} / (R_1 + R_2), \quad u_2 = E_{\text{К}} R_2 / (R_1 + R_2), \quad u_4 = u_2 - u_{\text{БЕ}}, \\ i_{\text{К}} &\approx i_{\text{Е}} = u_4 / R_4, \quad u_{\text{КЕ}} = E_{\text{К}} - (R_3 + R_4) i_{\text{К}}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

що одержуємо також із (9.12) при $i_{\text{Б}} = 0$. Такий спрощений розрахунок можна уточнити, знайшовши струм бази $i_{\text{Б}} = i_{\text{К}} / \beta$ і далі решту величин за формулами (8.13). За першою з формул (8.12) умову малості струму бази можна представити як $R_1 i_{\text{Б}} \ll E_{\text{К}}$, або

$$i_{\text{Б}} \ll E_{\text{К}} / R_1. \quad (8.15)$$

Тому спрощений розрахунок ведуть за такою послідовністю: розраховують струми та напруги за формулами (8.14), знаходять струм бази $i_{\text{Б}} = i_{\text{К}} / \beta$ і перевіряють умову (8.15). Якщо ця нерівність не досить сильна, обчислюють уточнені значення величин за формулами (8.13).

КМ 8.13. Виконати п. 1, 2 з підрозділу 8.5.4.

Аналіз схем із біполярними транзисторами можна суттєво спростити, користуючись кусково-лінійною апроксимацією вхідних і вихідних характеристик (рис. 8.28).

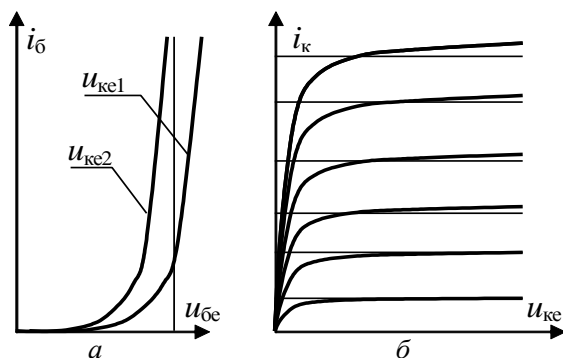


Рис. 8.28

Як видно, вихідні характеристики добре апроксимуються прямими $i_K = \alpha i_E = \beta i_B$, де $\beta = \alpha / (1 - \alpha)$, α — коефіцієнт передачі струму емітера; а вхідні характеристики — прямою $u_{BE} = \text{const}$. Зауважимо, що ці співвідношення використовувались у прикладі 8.7. Отже, перехід база-емітер можна змодельовати джерелом напруги, а перехід колектор-база — джерелом струму, керованим струмом (рис. 8.29, а). Залежність струму i_K від напруги u_{KE} і напруги u_{BE} від i_B можна врахувати, включивши опори R_B , R_K (див. рис. 8.29, б). Замінивши транзистори схемою, зображеною на рис. 8.29, одержують розрахункову лінійну схему, яку можна аналізувати методами теорії лінійних кіл.

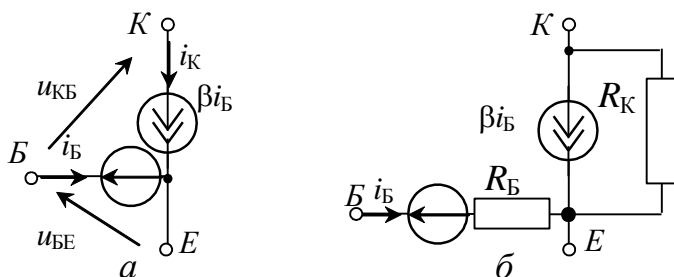


Рис. 8.29

Приклад 8.8. Проаналізувати в режимі постійних струмів схему, зображену на рис. 8.30, а.

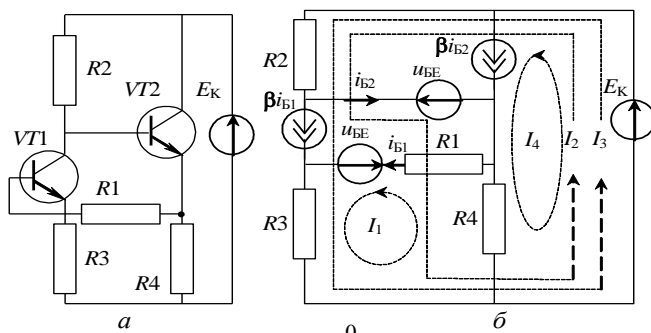


Рис. 8.30

Розв'язання. Замінивши транзистори лінійною моделлю (див. рис. 8.29, а), отримемо схему, зображену на рис. 8.30, б. Складемо контурні рівняння. Оскільки тут джерела струму не можна перетворити у джерела напруги за відсутністю паралельної провідності, виберемо контури так, щоб кожне із джерел струму опинилось в одному з контурів, як зроблено на рис. 8.30, б. Тоді струм цього контура дорівнюватиме струмові джерела, який виражається через струми інших контурів, що спростує систему контурних рівнянь. Так, система контурних рівнянь схеми (рис. 8.30, б) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} -u_{BE} &= (R_1 + R_3 + R_4)I_1 - R_4I_2 + R_3I_3 - R_4I_4, \\ E_K - u_{BE} &= -R_4I_1 + (R_2 + R_4)I_2 + R_2I_3 + R_4I_4, \\ I_3 &= \beta I_1, I_4 = \beta I_2. \end{aligned}$$

Підставивши I_3, I_4 з останніх рівнянь і поклавши $\beta + 1 \approx \beta$, одержимо

$$-u_{BE} = (R_1 + \beta R_3 + R_4)I_1 - \beta R_4I_2, \quad E_K - u_{BE} = (\beta R_2 - R_4)I_1 + (R_2 + \beta R_4)I_2.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо

$$\begin{aligned} I_1 &= [\beta R_4 E_K - (R_2 + 2\beta R_4)u_{BE}] / \Delta, \quad I_2 = [(R_1 + \beta R_3 + R_4)E_K - (R_1 + \beta R_3 - \beta R_2 + 2R_4)u_{BE}] / \Delta, \\ I_3 &= \beta I_1, \quad I_4 = \beta I_2, \end{aligned}$$

де $\Delta = \beta^2 (R_2 + R_3)R_4 + \beta (R_1 R_4 + R_2 R_3) + R_1 R_2$.

Маючи контурні струми, можемо знайти струми, напруги, потужності всіх елементів схеми.

КМ 8.14. Виконати п. 7 з підрозділу 8.5.4.

Статичний режим електронних приладів забезпечується належним вибором напруг джерел живлення, опорів навантаження та колами зміщення. Для розрахунків параметрів елементів схеми, які забезпечують статичний режим, необхідно вибрати початкову робочу точку. Її положення на сім'ї вихідних характеристик біполярного транзистора визначається величинами i_{K0}, u_{KE0}, i_{B0} .

Приклад 8.9. Розрахувати опори резисторів у схемі, зображеній на рис. 8.23, б, таким чином, щоб забезпечити статичний режим, який характеризується величинами i_{K0}, u_{KE0} , при заданому E_K та β .

Розв'язання. Заданих величин недостатньо для розв'язку. Потрібно додатково задати які-небудь струми та напруги. Звичайно беруть $i_2 = (5 \dots 10)i_B, u_4 = (0,05 \dots 0,15)E_K$. Тоді маємо

$$i_{B0} = i_{K0}/\beta, i_{E0} = i_{B0} + i_{K0} \approx i_{K0}, u_2 = u_4 + u_{BE}, i_1 = i_2 + i_{B0}, \\ u_1 = E_K - u_2, u_3 = E_K - u_4 - u_{KE},$$

звідки за законом Ома знаходимо опори:

$$R_1 = u_1/i_1, R_2 = u_2/i_2, R_3 = u_3/i_{K0}, R_4 = u_4/i_{E0}.$$

КМ 8.15. Виконати п. 3 з підрозділу 8.5.4.

Приклад 8.10. Розрахувати опори резисторів у схемі, зображеній на рис. 8.24, б, щоб забезпечити статичний режим із заданими величинами i_{K0}, u_{KE0} , при заданих E_K та β .

Розв'язання. Задаємося величинами $i_2 = (5 \dots 10)i_K/\beta, u_3 = (0,05 \dots 0,15)E_K$ і знаходимо

$$i_{B0} = i_{K0}/\beta, i_{E0} = i_{B0} + i_{K0} \approx i_{K0}, u_2 = u_3 + u_{BE}, i_1 = i_2 + i_{B0}, \\ u_4 = E_K - u_3 - u_{KE0}, u_1 = E_K - u_2 - u_4,$$

а також шукані опори: $R_1 = u_1/i_1, R_2 = u_2/i_2, R_3 = u_3/i_{E0}, R_4 = u_4/(i_{K0} + i_1)$.

Приклад 8.11. Розрахувати опори резисторів у схемі, зображеній на рис. 8.22, б, таким чином, щоб мати i_{C0}, u_{CB0} , в статичному режимі. Дано напругу E_K і сім'ю вихідних характеристик (рис. 8.25, б).

Розв'язання. На сім'ї вихідних характеристик по заданих величинах i_{C0}, u_{CB0} , знаходимо $u_{ЗВ0}$. Оскільки $u_1 = R_1 i_3 \approx 0$, то $u_3 = -u_{ЗВ0}$. Далі знаходимо $u_2 = E_C - u_{CB0} - u_3, R_2 = u_2/i_{C0}, R_3 = u_3/i_{C0}$. Опір R_1 не розраховується,

а вибирається таким чином, щоб забезпечити високий вхідний опір, але щоб при цьому $u_1 \approx 0$.

КМ 8.16. Виконати п. 6 з підрозділу 8.5.4.

8.3. Електричні кола в малосигнальному режимі

8.3.1. Параметри лінійних багатополюсних елементів

Як вже зазначалося, в малосигнальному режимі радіоелектронні кола відносно змінних складових моделюються лінійними схемами, в яких нелінійні компоненти представлені своїми диференціальними параметрами. Оскільки радіоелектронні кола містять багатополюсні компоненти — транзистори, інтегральні мікросхеми (ІМС), оптрони тощо, необхідно знати, якими параметрами описуються багатополюсники (БП), який їх фізичний смисл і як їх вимірювати, як складати рівняння схем із багатополюсними елементами.

Електромагнітний стан БП характеризується напругами і струмами полюсів (див. рис. 8.16, *а*), а також струмами та напругами входів, утворених парами полюсів (див. рис. 8.16, *б*). Зазвичай струм кожного з полюсів залежить від напруг усіх полюсів. У лінійних БП ці залежності мають вигляд

$$i_k = y_{k1}u_1 + y_{k2}u_2 + \dots + y_{kn}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.16)$$

Коефіцієнти y_{ki} , де $i, k = 1, 2, \dots, n$ називаються *y-параметрами БП*. Система рівнянь (8.16) еквівалентна матричному рівнянню

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix},$$

де матриця *y*-параметрів $[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}.$ (8.17)

Згідно з ЗКС $\sum_{k=1}^n i_k = 0$. Додавши рівняння (8.16), одержуємо: $\sum_{k=1}^n i_k = u_1$

$\sum_{k=1}^n y_{k1} + \dots + u_n \sum_{k=1}^n y_{kn} = 0$ для будь-яких $u \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Отже,

$\sum_{k=1}^n y_{kj} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Таким чином, сума елементів будь-якого стовпця ма-

триці (8.17) дорівнює нулю, тобто елементи одного з рядків матриці можна виразити через елементи інших рядків.

Якщо у схемі, зображеній на рис. 8.16, а, зрівняти потенціали всіх полюсів: $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$, то струми усіх полюсів $i_k = 0$. Тоді з (8.16) одержує-

мо $\sum_{k=1}^n y_{kj} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, тобто сума елементів будь-якого рядка також дорі-

внює нулеві, отже, елементи одного зі стовпців можна виразити через елементи решти стовпців.

Отже, із n^2 параметрів n -полюсника $(n-1)^2$ є незалежними. Через них можна виразити решту $(2n-1)$ залежних параметрів. Відомо, що якщо між елементами рядків чи стовпців визначника є залежності, то він дорівнює нулю. Отож, визначник матриці (8.17) дорівнює нулю й така матриця називається особливою. До аналогічних висновків можна дійти відносно БП (див. рис. 8.16, б), виражаючи напруги входів через струми:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} = [Z] \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix}, \text{ де матриця } z\text{-параметрів } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix}.$$

За принципом дуальності ця матриця також особлива, її елементи пов'язані співвідношеннями:

$$\sum_{k=1}^n Z_{kj} = 0, \quad \sum_{k=1}^n Z_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Щоб виміряти параметри БП, потрібно згідно з (8.16) зробити всі напруги, крім однієї, що дорівнюють нулю, та виміряти струми полюсів. Так, при $u_1 \neq 0$ і $u_2 = \dots = u_n = 0$ маємо $y_{11} = i_1/u_1$, $y_{21} = i_2/u_1$, \dots , $y_{n-1,1} = i_{n-1}/u_1$,

$y_{n1} = -\sum_{k=0}^{n-1} y_{ki}$. При таких вимірах можна визначати напруги відносно одного з полюсів, наприклад n -го. Параметри, заміряні в такий спосіб, називаються параметрами схеми зі спільним n -м полюсом. Розглянуті властивості особливої матриці параметрів дадуть змогу переходити від системи параметрів однієї схеми ввімкнення БП до іншої.

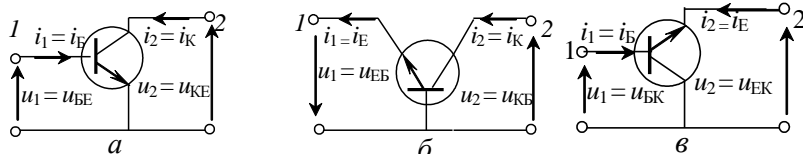


Рис. 8.31

Приклад 8.12. Вивести співвідношення для перерахування y -параметрів транзистора з однієї зі схем ввімкнення до іншої.

Розв'язання. У разі транзистора як триполюсника розрізняють три схеми ввімкнення: зі спільними емітером (СЕ), базою (СБ), колектором (СК) (рис. 8.31). Складемо рівняння з y -параметрами для схем СЕ, СБ, СК відповідно:

$$\begin{cases} i_1 = y_{11E} u_1 + y_{12E} u_2, \\ i_2 = y_{21E} u_1 + y_{22E} u_2; \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = y_{11Б} u_1 + y_{12Б} u_2, \\ i_2 = y_{21Б} u_1 + y_{22Б} u_2; \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = y_{11К} u_1 + y_{12К} u_2, \\ i_2 = y_{21К} u_1 + y_{22К} u_2; \end{cases}$$

Відповідні цим рівнянням скорочені матриці мають такий вигляд:

$$[Y_E] = \begin{matrix} Б \\ К \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11E} & y_{12E} \\ y_{21E} & y_{22E} \end{bmatrix}, [Y_Б] = \begin{matrix} Е \\ К \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11Б} & y_{12Б} \\ y_{21Б} & y_{22Б} \end{bmatrix}, [Y_К] = \begin{matrix} Б \\ Е \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11К} & y_{12К} \\ y_{21К} & y_{22К} \end{bmatrix}.$$

Доповнивши ці вкорочені матриці до особливих, одержимо:

$$[Y] = \begin{matrix} Б \\ К \\ Е \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11E} & y_{12E} & -(y_{11E} + y_{12E}) \\ y_{21E} & y_{22E} & -(y_{21E} + y_{22E}) \\ -(y_{11E} + y_{21E}) & -(y_{12E} + y_{22E}) & (y_{11E} + y_{12E} + y_{21E} + y_{22E}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} Б \\ К \\ Е \end{matrix} \begin{bmatrix} (y_{11Б} + y_{12Б} + y_{21Б} + y_{22Б}) & -(y_{12Б} + y_{22Б}) & -(y_{11Б} + y_{21Б}) \\ -(y_{21Б} + y_{22Б}) & y_{22Б} & y_{21Б} \\ -(y_{11Б} + y_{12Б}) & y_{12Б} & y_{11Б} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} \text{Б} \\ \text{К} \\ \text{Е} \end{matrix} \begin{bmatrix} y_{11\text{К}} & -(y_{11\text{К}} + y_{12\text{К}}) & y_{12\text{К}} \\ -(y_{11\text{К}} + y_{21\text{К}}) & y_{11\text{К}} + y_{12\text{К}} + y_{21\text{К}} + y_{22\text{К}} & -(y_{12\text{К}} + y_{22\text{К}}) \\ y_{21\text{К}} & -(y_{21\text{К}} + y_{22\text{К}}) & y_{22\text{К}} \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

За допомогою (8.18) параметри будь-якої схеми ввімкнення можна виразити через параметри іншої схеми, оскільки рівність матриць означає рівність відповідних елементів. Наприклад, y -параметри схеми СЕ виражаються через параметри схеми СБ так:

$$y_{11\text{Е}} = y_{11\text{Б}} + y_{12\text{Б}} + y_{21\text{Б}} + y_{22\text{Б}}, \quad y_{12\text{Е}} = -(y_{12\text{Б}} + y_{22\text{Б}}),$$

$$y_{21\text{Е}} = -(y_{21\text{Б}} + y_{22\text{Б}}), \quad y_{22\text{Е}} = y_{22\text{Б}}.$$

КМ 8.17. Виконати п. 1, 2, 3 з підрозділу 8.5.5.

8.3.2. Схеми з багатополісними елементами в малосигнальному режимі

Аналіз електронних кіл у малосигнальному режимі починають зі складання схеми для змінних складових. При цьому замикають елементи, опір яких у робочому діапазоні частоти є малим; розмикають елементи з великим опором; джерела сталої напруги замінюють внутрішнім опором або замикають, якщо ним можна знехтувати. Для широкосмугових кіл зазвичай складають схеми окремо для нижчих, середніх та вищих частот робочого діапазону.

Приклад 8.13. Скласти для підсилювального каскаду (див. рис. 8.23, а) схеми заміщення для змінних складових на середніх, нижчих та вищих частотах смуги пропускання.

Розв'язання. Ємності розділових конденсаторів C_1 , C_2 вибирають доволі великими з тим, щоб їх опір на робочих частотах був нехтовно малим. Паразитні ємності малі, і їх можна зі схеми відключити. Отже, замикаючи у вихідній схемі елементи C_1 , C_2 , відмикаючи конструктивну ємність C_0 , а також перемикаючи вузли, до яких ввімкнено джерело живлення, одержуємо схему для середніх частот робочого діапазону (рис. 8.32, а). Робочий діапазон з боку нижчих частот обмежується ємностями C_1 , C_2 , які утворюють CR -ланцюжки: C_1 , $(R_1 \parallel R_2)$ та C_2 , R_5 , тому схема заміщення на нижніх частотах повинна містити ці ємності (рис. 8.32, б). Верхні частоти обмежуються конструктивною ємністю C_0 , утвореною вихідною ємністю транзистора та монтажними ємностями. Опір цієї ємності зменшується зі збільшенням частоти і починає шунтувати навантаження каскаду, утвореного для змінного струму паралельним з'єднанням опорів R_3 , R_5 . На вищих частотах опори решти ємностей малі, і їх у схемі можна замкнути, після чого отримаємо схему для вищих частот (рис. 8.32, в).

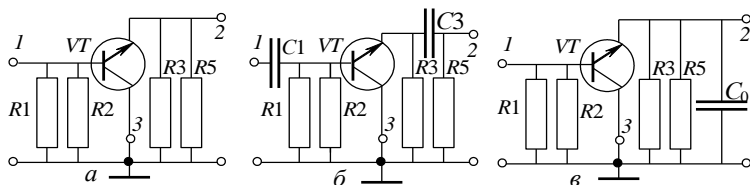


Рис. 8.32

Приклад 8.14. Скласти малосигнальну схему заміщення резонансного підсилювача (див. рис. 8.24, а). Дано: $C_1 = 1$ нФ, $C_2 = 10$ нФ, $C_5 = 19$ нФ, $C_e = 300$ пФ, $L_1 = 0,1$ мГн.

Розв'язання. Резонансний підсилювач є вузькосмуговим колом, бо його АЧХ визначається резонансним контуром, утвореним індуктивністю L_1 та ємностями C_0 , C_3 , C_4 . Вважаючи, що ємності C_1 , C_2 , C_5 мають малий опір на резонансній частоті, замикаємо їх та, нехтуючи опором джерела живлення для змінного струму, одержуємо малосигнальну схему (див. рис. 8.33), в якій ураховано опір втрат у контурі R_k . Перевіримо допустимість нехтування ємностями C_1 , C_2 , C_5 . Знаходимо резонансну частоту $f_p = 1/2\pi\sqrt{L_1 C_e} = 920$ кГц, де $C_e = C_0 + C_3 C_4 / (C_3 + C_4)$. На цій частоті $X_{C1} = 175$ Ом, $X_{C2} = 17,5$ Ом, $X_{C5} = 9$ Ом. Отже, опори досить малі і ними можна знехтувати.

Розглянемо методику складання *рівнянь схем із багатополусими елементами*. На рис. 8.34 наведено фрагмент схеми з БП. Складаємо рівняння k -го вузла за методом вузлових напруг: $J_k - i_1 = y_{k1}u_1 + \dots + y_{kk}u_k + \dots + y_{kl}u_l + \dots + y_{km}u_m + \dots + y_{kn}u_n$. Струм i_1 виражаємо через напруги полюсів БП за рівнянням вигляду (8.16), а саме: $i_1 = Y_{11}u_k + Y_{12}u_l + Y_{13}u_m$. Підставивши цей вираз у вузлове рівняння, одержуємо:

$$J_k = y_{k1}u_1 + \dots + (y_{kk} + Y_{11})u_k + \dots + (y_{kl} + Y_{12})u_l + \dots + (y_{km} + Y_{13})u_m + \dots + y_{kn}u_n.$$

Склавши рівняння для решти вузлів, а потім і матрицю провідностей, помічаємо, що параметри БП опиняються в її рядках і стовпцях із номерами тих вузлів, до яких він увімкнений:

$$[Y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} l & k & l & m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ k \\ l \\ m \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1k} & \dots & y_{1l} & \dots & y_{1m} & \dots & y_{1n} \\ y_{k1} & \dots & (y_{kk} + Y_{11}) & \dots & (y_{kl} + Y_{12}) & \dots & (y_{km} + Y_{13}) & \dots & y_{kn} \\ y_{l1} & \dots & (y_{lk} + Y_{21}) & \dots & (y_{ll} + Y_{22}) & \dots & (y_{lm} + Y_{23}) & \dots & y_{ln} \\ y_{m1} & \dots & (y_{mk} + Y_{31}) & \dots & (y_{ml} + Y_{32}) & \dots & (y_{mm} + Y_{33}) & \dots & y_{mn} \\ y_{n1} & \dots & y_{nk} & \dots & y_{nl} & \dots & y_{nm} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Це дає змогу сформулювати такий алгоритм складання матриці y -параметрів схеми з багатополусними елементами: *складається матриця $[Y]$ схеми без багатополусників; складаються особливі матриці y -параметрів усіх БП, і їх рядкам і стовпцям приписуються номери тих вузлів, до яких підімкнені відповідні полюси багатополусників; складаються елементи мат-*

риць багатополіусників з елементами матриці $[Y]$, розташовані в рядках і стовпцях з однаковими номерами.

Якщо у щойно наведеному алгоритмі замінити слова «відключивши багатополіусники» на «замкнувши багатополіусники», «у-параметри» — на «z-параметри», «вузли» — на «контури», отримаємо дуальний алгоритм складання матриці $[Z]$.

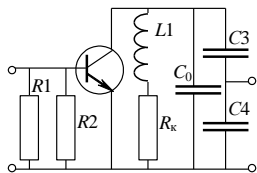


Рис. 8.33

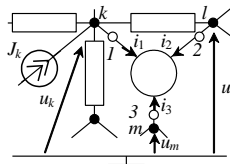


Рис. 8.34

Приклад 8.15. Розрахувати коефіцієнт підсилення напруги підсилювального ступеня, малосигнальну схему якої наведено на рис. 9.35, а. Дано y_E -параметри транзистора, См: $g_{11E} = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $g_{12E} = -0,75 \cdot 10^{-6}$, $g_{21E} = 15 \cdot 10^{-3}$, $g_{22E} = 9,5 \cdot 10^{-6}$, а також опори резисторів, кОм: $R_1 = 20$, $R_2 = 10$, $R_3 = 0,3$, $R_4 = 5$.

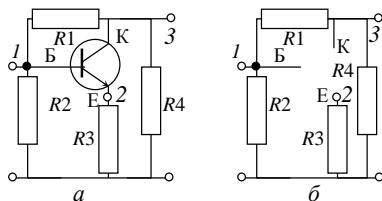


Рис. 8.35

Розв'язання. Відмикаємо транзистор і для решти схеми (рис. 8.35, б) складаємо матрицю провідностей:

$$[Y]_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & & -G_1 \\ & G_3 & \\ -G_1 & & (G_1 + G_4) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Складаємо особливу матрицю у-параметрів транзистора та приписуємо її рядкам і стовпцям номери вузлів, до яких ввімкнено відповідні електроди транзистора:

$$[Y]_T = \begin{matrix} & \text{Б(1)} & & \text{К(3)} & & \text{Е(2)} \\ \begin{matrix} \text{Б(1)} \\ \text{К(3)} \\ \text{Е(2)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_{11E} & g_{12E} & -(g_{11E} + g_{12E}) \\ g_{21E} & g_{22E} & -(g_{21E} + g_{22E}) \\ -(g_{11E} + g_{21E}) & -(g_{12E} + g_{22E}) & (g_{11E} + g_{12E} + g_{21E} + g_{22E}) \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Підсумовуючи елементи матриць $[Y]_G$, $[Y]_T$, розташовані в рядках та стовпцях з однаковими номерами, одержуємо матрицю параметрів усієї схеми:

$$[Y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + g_{11E} & -(g_{11E} + g_{12E}) & -G_1 + g_{12E} \\ -(g_{11E} + g_{21E}) & G_3 + (g_{11E} + g_{12E} + g_{21E} + g_{22E}) & -(g_{12E} + g_{22E}) \\ -G_1 + g_{21E} & -(g_{21E} + g_{22E}) & G_1 + G_4 + g_{22E} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Ураховуючи, що числові значення параметрів відрізняються на кілька порядків, матрицю $[Y]$ можна спростити:

$$[Y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_1 + G_2 + g_{11E} & -g_{11E} & -G_1 + g_{12E} \\ -g_{21E} & G_3 + g_{21E} & -(g_{12E} + g_{22E}) \\ g_{21E} & -g_{21E} & G_1 + G_4 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

де $G_1 = 1/R_1 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ См, $G_2 = 1/R_2 = 10^{-4}$ См, $G_3 = 1/R_3 = 3,3 \cdot 10^{-3}$ См, $G_4 = 1/R_4 = 0,2 \cdot 10^{-3}$ См. Знаходимо коефіцієнт передачі напруги [див. (3.28)]:

$$K_U = \frac{\Delta_{13}^G}{\Delta_{11}^G} = \frac{g_{21E} G_3}{(g_{21E} + G_3)(G_1 + G_4) - g_{21E}(g_{12E} + g_{22E})} = -10,5.$$

Знак «мінус» означає інвертування вихідної напруги: при зростанні вхідної напруги вихідна напруга зменшується і навпаки.

У малосигнальному режимі електронні прилади можна також замінювати лінійними схемами із залежними джерелами. На рис. 8.36, *а* наведено низькочастотну, а на рис. 8.36, *б* — спрощену високочастотну схему заміщення транзистора. Оскільки схеми заміщення містять залежні джерела, потрібно розглянути методику складання рівнянь таких схем. Розглянемо джерело струму, кероване напругою (ДСКН) (рис. 8.37, *а*). Складаємо рівняння вузлів 3, 4. При цьому струм джерела $\sigma u_k = \sigma(u_1 - u_2)$ ввійде як доданок у задавальні струми цих вузлів: $J_3 + \sigma(u_1 - u_2) = \dots$, $J_4 - \sigma(u_1 - u_2) = \dots$, де J_3 , J_4 — стру-

ми незалежних джерел, підімкнених до цих вузлів. Ці рівняння далі перетворюються до вигляду: $J_3 = -\sigma u_1 + \sigma u_2 + \dots$, $J_3 = \sigma u_1 - \sigma u_2 + \dots$

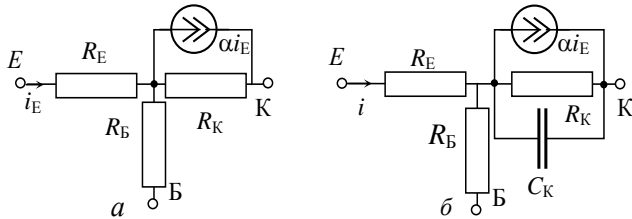


Рис. 8.36

Другий спосіб складання рівнянь будуватиметься на поданні залежних джерел як багатополіусників. Так, для рис. 8.37, а маємо:

$$i_1 = 0, i_2 = 0, i_3 = -\sigma u_1 + \sigma u_2, i_4 = \sigma u_1 - \sigma u_2.$$

Отже, особлива матриця у-параметрів ДСКН

$$[Y]_{\text{ДСКН}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma & \sigma & 0 & 0 \\ \sigma & -\sigma & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Для джерела струму, керованого струмом (ДСКС) (рис. 8.37, б), маємо: $i_1 = Y u_1 - Y u_2$, $i_2 = -Y u_1 + Y u_2$, $i_3 = -\alpha Y u_1 + \alpha Y u_2$, $i_4 = \alpha Y u_1 - \alpha Y u_2$, звідки знаходимо

$$[Y]_{\text{ДСКС}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y & -Y & 0 & 0 \\ -Y & Y & 0 & 0 \\ -\alpha Y & \alpha Y & 0 & 0 \\ \alpha Y & -\alpha Y & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (8.19)$$

Маючи матриці у-параметрів залежних джерел, можемо складати рівняння схем із такими джерелами як було розглянуто вище.

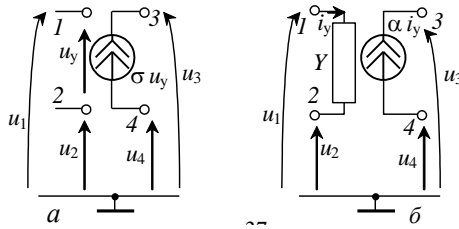


Рис. 8.37

Приклад 8.16. Розрахувати коефіцієнт підсилення напруги ступеня СБ, малосигнальну схему якої подано на рис. 8.38, *а*, в якій $G_1 = 10^{-4}$ СМ, $G_2 = 10^{-3}$ СМ. Параметри схеми заміщення транзистора дорівнюють: $r_E = 50$ Ом, $r_B = 330$ Ом, $r_K = 10^6$ Ом, $\alpha = 0,98$.

Розв'язання. Замінивши транзистор на схему, зображену на рис. 8.36, *а*, одержимо розрахункову схему (рис. 8.38, *б*), у якій J_C — джерело сигналу. Складаємо систему вузлових рівнянь:

$$J_C = (G_1 + g_E)u_1 - g_E u_2, \quad -\alpha i_E = -g_E u_1 + (g_E + g_B + g_K)u_2 - g_K u_3, \\ \alpha i_E = -g_K u_2 + (g_K + G_2)u_3.$$

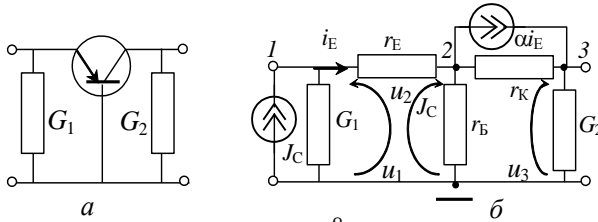


Рис. 8.38

Урахувавши, що $i_E = g_E(u_1 - u_2)$, перетворимо рівняння до вигляду

$$J_C = (G_1 + g_E)u_1 - g_E u_2, \quad 0 = (\alpha g_E - g_E)u_1 + (g_E - \alpha g_E + g_B + g_K)u_2 - g_K u_3, \\ 0 = -\alpha g_E u_1 + (\alpha g_E - g_K)u_2 + (g_K + G_2)u_3,$$

де $g_E = 1/r_E = 2 \cdot 10^{-2}$ СМ, $g_B = 1/r_B = 3 \cdot 10^{-3}$ СМ, $g_K = 1/r_K = 10^{-6}$ СМ.

Нехтуючи малими величинами, складаємо матрицю провідностей

$$[Y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_E & -g_E & \\ -g_E(1-\alpha) & g_E(1-\alpha) + g_B & -g_K \\ -\alpha g_E & \alpha g_E & G_2 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (8.20)$$

Коефіцієнт передачі напруги знаходимо як

$$K_U = \frac{\Delta_{13}^G}{\Delta_{11}^G} = \frac{\alpha g_E g_B}{(1-\alpha)g_E G_2 + g_B G_2 + \alpha g_E g_K} = 17,2.$$

Матрицю (8.20) можна також отримати, розглядаючи кероване джерело струму αi_E з керуючою віткою r_E як багатополусник із матрицею y -параметрів:

$$[Y]_{ДСКС} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_E & -g_E & 0 & 0 \\ -g_E & g_E & 0 & 0 \\ -\alpha g_E & \alpha g_E & 0 & 0 \\ \alpha g_E & -\alpha g_E & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (8.21)$$

складеною відповідно до (8.19), причому рядкам і стовпцям приписано номери відповідних вузлів схеми (див. рис. 8.38, б). Складаємо тепер y -матрицю схеми з урахуванням тільки двополусних елементів:

$$[Y]_G = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_B + g_K & -g_K \\ 0 & -g_K & G_2 + g_K \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (8.22)$$

Підсумовуючи елементи матриць (8.21) та (8.22), одержуємо матрицю y -параметрів схеми:

$$[Y] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_1 + g_E & -g_E & 0 \\ -g_E + \alpha g_E & g_B + g_K + g_E - \alpha g_E & -g_K \\ -\alpha g_E & -g_K + \alpha g_E & G_2 + g_K \end{bmatrix} \end{matrix},$$

яка дорівнює матриці (8.20), якщо знехтувати малими доданками.

Приклад 8.17. Розрахувати параметри схеми заміщення транзистора (рис. 8.39, а), якщо відомі його h -параметри.

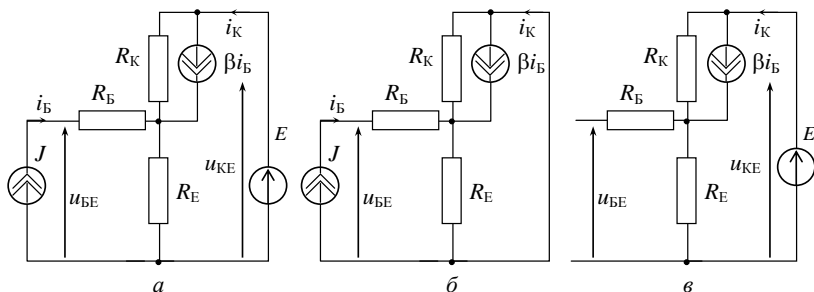


Рис. 8.39

Розв'язання. Знайдемо h -параметри схеми, зображеної на рис. 8.39, а, виразивши їх через параметри моделі транзистора. Покладаючи $u_{KE} = 0$, отримаємо схему (рис. 8.39, б), в якій

$$u_{BE} = \left(R_B + \frac{R_E R_K (\beta + 1)}{R_E + R_K} \right) i_B, \quad i_K = \left(\beta - \frac{R_E (\beta + 1)}{R_E + R_K} \right) i_B. \quad (8.23)$$

Далі, при $i_B = 0$ в схемі, зображеній на рис. 8.39, в, знаходимо

$$u_{BE} = \left(\frac{R_E}{R_E + R_K} \right) u_{KE}, \quad i_K = \frac{u_{KE}}{R_E + R_K}. \quad (8.24)$$

Із виразів (8.23) і (8.24) виводимо h -параметри схеми заміщення транзистора:

$$h_{11} = R_B + h_{12} R_K (\beta + 1), \quad h_{12} = R_E h_{22}, \quad h_{21} = \beta - h_{12} (\beta + 1), \quad h_{22} = \frac{1}{R_E + R_K},$$

звідки знаходимо параметри моделі транзистора, виражаючи їх через h -параметри:

$$R_E = \frac{h_{12}}{h_{22}}, \quad R_K = \frac{1-h_{12}}{h_{22}}, \quad R_B = h_{11} - \frac{h_{12}}{h_{22}}(h_{21} - 2h_{12} + 1), \quad \beta = \frac{h_{21} - h_{12}}{1 - h_{12}}. \quad (8.25)$$

КМ 8.18. Виконати п. 4 з підрозділу 8.5.5.

8.4. Перетворення форми і спектра сигналів у нелінійних колах

Різноманітні процеси обробки сигналів у радіоелектронних колах приводять до зміни як форми, так і спектра сигналу, оскільки форма й спектр пов'язані між собою відповідно до перетворень Фур'є. Форма сигналу і його спектр змінюються внаслідок як інерційності, так й нелінійності кола. Суттєва відмінність полягає в тому, що в лінійних інерційних колах завдяки ефекту фільтрації спектр вихідного сигналу бідніший, ніж вхідного, тоді як у нелінійних колах перетворення сигналу супроводиться збагаченням спектра новими складовими. Необхідним етапом розрахунків нелінійних пристроїв є знаходження спектрів при нелінійних перетвореннях сигналів. Розглянемо методи *гармонічного аналізу* коливань у нелінійних колах.

Метод кратних дуг застосовується при апроксимації степеневим поліномом $i = i_0 + \sigma_1 u + \dots + \sigma_n u^n$. Якщо $u = U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, то

$$i = i_0 + \sigma_1 U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \sigma_2 U_m^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + \sigma_n U_m^n \cos^n(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Для розкладання цього виразу на гармонічні складові застосовують тригонометричні формули кратних дуг (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

$\sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x)$	$\cos^2 x = 1/2(1 + \cos 2x)$
$\sin^3 x = 1/4(3 \sin x - \sin 3x)$	$\cos^3 x = 1/4(3 \cos x - \cos 3x)$
$\sin^4 x = 1/8(3 - 4 \cos 2x + \cos 4x)$	$\cos^4 x = 1/8(3 + 4 \cos 2x + \cos 4x)$
$\sin^5 x = 1/16(10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x)$	$\cos^5 x = 1/16(10 \cos x - 5 \cos 3x + \cos 5x)$
$\sin x_1 \sin x_2 = 1/2 \cos(x_1 - x_2) - 1/2 \cos(x_1 + x_2)$	$\cos x_1 \cos x_2 = 1/2 \cos(x_1 + x_2) + 1/2 \cos(x_1 - x_2)$

Підставивши ці формули та звівши подібні члени, знаходимо сталу складову та амплітуди гармонік:

$$I_0 = i_0 + 1/2 \sigma_2 U_m^2 + 3/8 \sigma_4 U_m^4 + \dots, \quad I_1 = \sigma_1 U_m + 3/4 \sigma_3 U_m^3 + 5/8 \sigma_5 U_m^5 + \dots,$$

$$I_2 = 1/2 \sigma_2 U_m^2 + 1/2 \sigma_4 U_m^4 + \dots, \quad I_3 = 1/4 \sigma_3 U_m^3 + 5/16 \sigma_5 U_m^5 + \dots,$$

.....

$$I_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+k)!}{2^{2m+k-1} m!(m+k)!} \sigma_{2m+k} U_m^{2m+k}. \quad (8.26)$$

Вираз (8.26) показує, що навіть при моногармонічній дії в нелінійному колі спектр відгуку містить теоретично нескінченну кількість гармонік; амплітуди гармонік відгуку нелінійно залежать від амплітуди дії; амплітуда k -ї гармоніки визначається членами полінома, що мають степінь $l \geq k$, причому для парних (непарних) k степінь l парне (непарне).

Приклад 8.18. Розрахувати спектральний склад струму бази транзистора КТ324А, користуючись апроксимацією (8.3) при $u_{BE} = 0,4 + 0,1 \cos 10^6 t$, В.

Розв'язання. Підставляємо у (8.3) задану напругу:

$$i = 2,0 + 18,5 \cdot 0,1 \cos 10^6 t + 65 \cdot 0,1^2 \cos^2 10^6 t.$$

Застосувавши формули (9.26), знаходимо, мкА:

$$I_{B0} = 2,32, \quad I_{B1} = 1,85, \quad I_{B2} = 0,32.$$

КМ 8.19. Виконати п. 1 з підрозділу 8.5.6.

Проаналізуємо результат дії на нелінійний опір суми двох гармонічних напруг різних частот: $u = U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t$. Апроксимуємо ВАХ степеневим рядом

$$i = f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (U_{m1} \sin \omega_1 t + U_{m2} \sin \omega_2 t)^k.$$

Розкриваючи дужки, застосовуючи тригонометричні формули табл.8.1 та зводячи подібні члени, можна розкласти струм на суму гармонічних складових із частотами

$$\omega_{\text{комб}} = m\omega_1 \pm n\omega_2; \quad m, n = 0, 1, \dots, \quad (8.27)$$

які називаються *комбінаційними*. Отже, при дії на нелінійне коло двох гармонічних джерел одержують велику різноманітність спектрів, що використовується в багатьох пристроях обробки сигналів.

Приклад 8.19. Виконати спектральний аналіз струму бази транзистора, вхідна характеристика якої апроксимується виразом (8.2), а напруга $u_{BE} = u_{BE0} + u_1 + u_2$, де $u_1 = U_{m1} \cos \omega_1 t$, $u_2 = U_{m2} \cos \omega_2 t$.

Розв'язання. Підставляємо задану напругу u_{BE} у (8.2):

$$i_B = i_{B0} + \sigma_1(u_1 + u_2) + \sigma_2(u_1 + u_2)^2 = i_{B0} + \sigma_1 u_1 + \sigma_1 u_2 + \sigma_2 u_1^2 + \sigma_2 u_2^2 + 2\sigma_2 u_1 u_2.$$

Підставивши сюди значення напруг u_1, u_2 та застосувавши формули табл. 9.1, одержуємо

$$i_B = i_{B0} + 0,5\sigma_2(U_{m1}^2 + U_{m2}^2) + \sigma_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + \sigma_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + 0,5\sigma_2 U_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t + 0,5\sigma_2 U_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t + \sigma_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t + \sigma_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t.$$

Отже, струм бази має сталу складову і гармонічні складові на частотах $\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2$.

КМ 8.20. Виконати п. 3 з підрозділу 8.5.6.

Метод трьох-п'яти ординат не потребує апроксимації характеристики не-лінійного елемента і полягає в такому. ВАХ розбивається на інтервали, як показано на рис. 8.40, і визначаються ординати, що відповідають значенням $\omega t = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi$. У методі трьох ординат струм шукають у вигляді: $i = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t$. Підставивши сюди $\omega t = 0, \pi/2, \pi$ та відповідні ординати, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} i_{\max} &= I_0 + I_1 + I_2, & i_0 &= I_0 - I_2, & i_{\min} &= I_0 - I_1 + I_2, \text{ з якої знаходимо} \\ I_0 &= 0,25(i_{\max} + 2i_0 + i_{\min}), & I_1 &= 0,5(i_{\max} - i_{\min}), \\ I_2 &= 0,25(i_{\max} - 2i_0 + i_{\min}). \end{aligned} \quad (8.28)$$

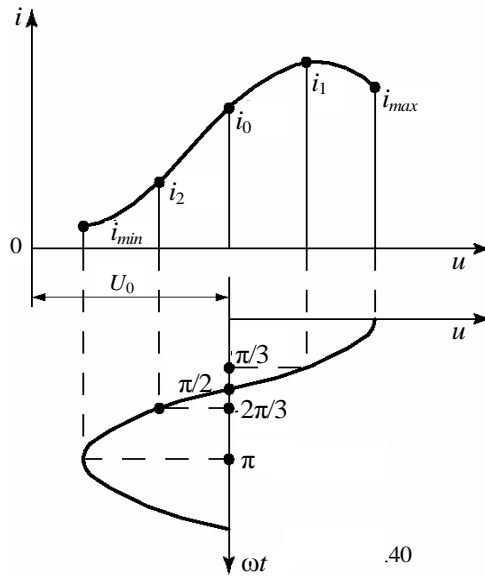


Рис. 8.40

Подаючи струм як

$$i = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + I_3 \cos 3\omega t + I_4 \cos 4\omega t,$$

аналогічно знаходять за п'ятьма ординатами амплітуди гармонік:

$$I_0 = 1/6(i_{\text{макс}} + 2(i_1 + i_2) + i_{\text{мін}}), \quad I_1 = 1/3(i_{\text{макс}} + i_{\text{мін}} + i_1 - i_2),$$

$$I_2 = 1/4(i_{\text{макс}} - 2i_0 + i_{\text{мін}}), \quad I_3 = 1/6(i_{\text{макс}} - 2(i_1 - i_2) + i_{\text{мін}}),$$

$$I_4 = 1/12(i_{\text{макс}} - 4(i_1 + i_2) + i_{\text{мін}} + 6i_0).$$

Приклад 8.20. Розрахувати спектральний склад струму бази транзистора, вхідну характеристику якого наведено на рис. 8.8, якщо напруга, В: $u_{\text{БЕ}} = 0,4 + 0,1 \cos 10^6 t$.

Розв'язання. На характеристиці визначаємо значення струму бази при $u_{\text{БЕ}} = 0,3; 0,4; 0,5$ В: $i_{\text{мін}} = 0,8; i_0 = 2,0; i_{\text{макс}} = 4,5$ мкА. За формулами (8.28) знаходимо $I_0 = 2,32; I_1 = 1,85; I_2 = 0,32$ мкА. Отже,

$$i_{\text{Б}} = 2,32 + 1,85 \cos 10^6 t + 0,32 \cos 2 \cdot 10^6 t,$$

що збігається з результатом, одержаним у прикл. 8.18.

КМ 8.21. Виконати п. 2 з підрозділу 8.5.6.

Метод кута відсікання застосовують при кусково-лінійній апроксимації (рис. 8.41). При цьому струм має вигляд періодичної послідовності зрізаних косинусоїдальних імпульсів. Спектральний склад струму визначають, розкладаючи його в ряд Фур'є так, як у прикладі 8.1.

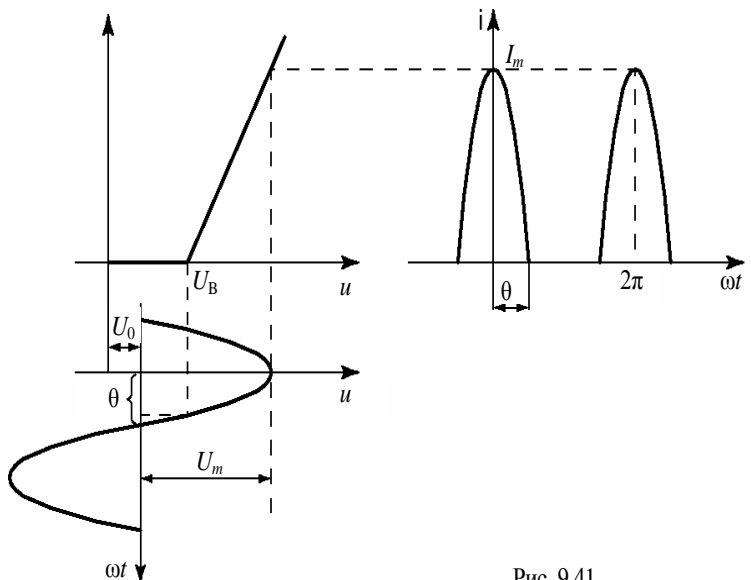


Рис. 9.41

Рис. 8.41

Приклад 8.21. Кусково-лінійна апроксимація ВАХ діода (див. рис. 8.41) має напругу відсікання $U_B = 0,6$ В і диференціальну провідність $G_d = 50$ мСм. До діода прикладено напругу $u = U_0 + U_m \cos \omega t$, де $U_0 = -1,4$ В, $U_m = 4$ В. Знайти сталу складову та амплітуди перших трьох гармонік струму.

Розв'язання. Визначаємо кут відсікання із співвідношення $U_B - U_0 = U_m \cos \theta$, звідки

$$\theta = \arccos((U_B - U_0) / U_m) = 60^\circ.$$

Знаходимо амплітуду імпульсу струму $I_m = G_d U_m (1 - \cos \theta) = 100$ мА. За графіками (рис. 8.2) для $\theta = 60^\circ$ визначаємо коефіцієнти: $f_0 = 0,22$; $f_1 = 0,3$; $f_2 =$

0,27; $f_3 = 0,15$. Далі знаходимо сталу складову та амплітуди гармонік: $I_0 = I_m$
 $f_0 = 22 \text{ мА}$; $I_1 = I_m f_1 = 38 \text{ мА}$; $I_2 = I_m f_2 = 27 \text{ мА}$; $I_3 = I_m f_3 = 15 \text{ мА}$.

КМ. 8.22. Виконати п. 1 з підрозділу 8.5.1.

8.5. Методи аналізу нелінійних інерційних кіл

8.5.1. Числові методи

Розглянемо числові методи розв'язання рівнянь стану. Нехай маємо систему рівнянь

$$dx_1/dt = f_1(x_1, x_2, t), \quad dx_2/dt = f_2(x_1, x_2, t).$$

Кожну зі змінних можемо наближено подати як

$$x_1(t) \approx x_1(t_0) + \frac{dx_1(t_0)}{dt} \Delta t = x_1(t_0) + f_1(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \Delta t;$$

$$x_2(t) \approx x_2(t_0) + \frac{dx_2(t_0)}{dt} \Delta t = x_2(t_0) + f_2(x_1(t_0), x_2(t_0), t_0) \Delta t,$$

де $\Delta t = t - t_0$. Отже, маючи початкові умови $x_1(t_0), x_2(t_0)$, можемо знайти $x_1(t_1), x_2(t_1)$, покладаючи $t = t_1$. Далі підставивши $t_0 = t_1, t = t_2$, знайдемо $x_1(t_2), x_2(t_2)$ і т. д. Очевидно, точність таких розрахунків тим більша, чим менші інтервали Δt . Цей метод можна поширити на систему рівнянь будь-якого порядку. Великий обсяг числових розрахунків за цим методом потребує застосування ЕОМ.

Кусково-лінійна апроксимація дає змогу нелінійні кола моделювати лінійними схемами, якщо робоча точка не виходить за межі лінійного відрізка апроксимуючої ламаної. Якщо ж робоча ділянка охоплює кілька відрізків, аналіз ведуть так. Розглянемо схему з нелінійним резистором (див. рис. 8.14, а), ВАХ якого апроксимована ламаною $OABC$ (див. рис. 8.14, в).

Визначаємо положення робочої точки в початковий момент. Оскільки $u_C(0) = 0$, маємо $u(0) = u_E$. Отже, початкова робоча точка D лежить на відрізку BC , який описується рівнянням $u = U_{01} + R_{д1}i$, де $R_{д1}$ — диференціальний опір на відрізку BC . Моделюємо резистор двополюсником (див. рис. 8.5) й одержуємо операторну схему (рис. 10.14, б), з якої знаходимо

$$I(p) = \frac{U_E(p) - U_{0k}/p - U_{Ck}/p}{R_{dk} + 1/pC} = \frac{U_E(p) - U_{0k} - U_{Ck}}{R_{dk}} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_k},$$

де $\tau_k = R_{dk}C$. Нехай $u_E = U_m \cdot 1(t)$. Тоді $U_E(p) = U_m/p$, а також

$$I(p) = \frac{U_m - U_{0k} - U_{Ck}}{R_{dk}} \cdot \frac{1}{p + 1/\tau_k} \leftrightarrow i(t) = \frac{U_m - U_{0k} - U_{Ck}}{R_{dk}} \exp(-t/\tau_k) \cdot 1(t). \quad (8.11)$$

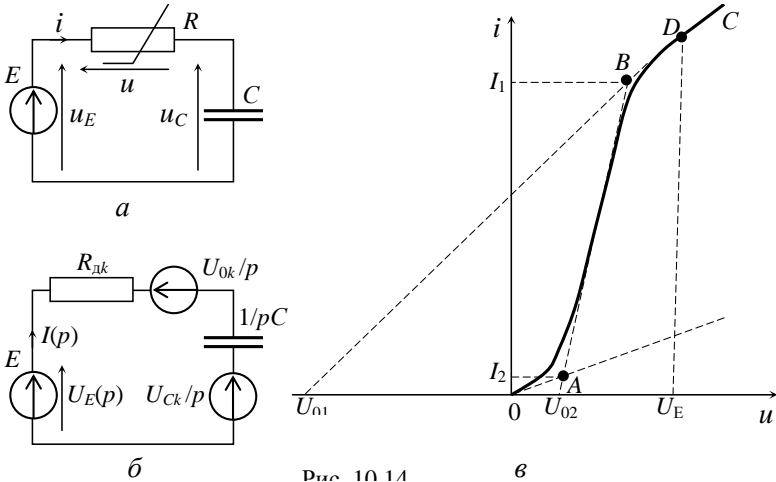


Рис. 8.14

Рис. 8.14

Для відрізка BC беремо $k = 1$, $U_{Ck} = U_{C1} = 0$. Струм, зменшуючись за законом експоненти (8.11), досягає в момент t_1 величини I_1 , після чого робоча точка переходить на відрізок AB . При цьому параметри U_{0k} , R_{dk} стрибкоподібно змінюються. Для подальшого визначення струму у формулу (8.11) потрібно підставити нові значення параметрів та початкової напруги на ємності $U_{Ck} = U_{C2} = U_m - R_{d1}I_1$, а також вважати початковим момент t_1 . Так роблять і при переході на інші лінійні відрізки, «зшиваючи» осцилограму струму на стиках відрізків апроксимуючої ламаної.

8.5.2. Квазілінійний метод

У практичній радіоелектроніці широкого застосування набули *квазілінійні кола*, які складаються з нелінійного НП та лінійного ЛП перетворювачів (див. рис. 8.15). У НП сигнал $x(t)$ зазнає нелінійних спотворень, так що спектр сигналу $x_1(t)$ збагачується новими складовими. Водночас ЛП є частотно-селективним колом, яке передає лише одну з гармонік сигналу $x_1(t)$. Якщо

$x(t) = X_m \sin \omega_1 t$, а ЛП настроєний на частоту першої гармоніки ω_1 , то $y(t) = Y_m \sin(\omega_1 t + \varphi)$. Таким чином, при гармонічній дії реакція є також гармонічною, що характерне для лінійного кола. Отже, до таких кіл можна застосувати метод комплексних амплітуд. Відмінність полягає у тому, що як амплітуда, так і фаза вихідного сигналу залежать від амплітуди вхідного сигналу, причому нелінійно.

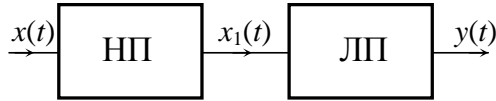


Рис. 8.15

Такий підхід до аналізу нелінійних кіл цього класу називається *методом гармонічної лінеаризації*, або *квазілінійним методом*. За аналогією з лінійними колами можна розглядати схемні функції квазілінійних кіл, причому відповідні функції квазілінійних кіл називають *середніми параметрами*.

Приклад 85. Знайти залежність амплітуди першої гармоніки струму від амплітуди напруги, а також середню провідність резистивного двополюсника, ВАХ якого описується виразом $i = \sigma_1 U + \sigma_3 U^3$.

Розв'язання. Покладаючи $u = U_m \cos \omega t$ і використовуючи формули табл. 9.1, знаходимо струм $i = (\sigma_1 U_m + 0,75 \sigma_3 U_m^3) \cos \omega t + 0,25 \sigma_3 U_m^3 \cos 3\omega t$. Визначаючи середню комплексну провідність як відношення комплексної амплітуди першої гармоніки струму $\underline{I}_1 = \sigma_1 U_m + 0,75 \sigma_3 U_m^3$ до комплексної амплітуди напруги $\underline{U} = U_m$, знаходимо $\tilde{Y} = \underline{I}_1 / \underline{U} = \sigma_1 + 0,75 \sigma_3 U_m^2 = \tilde{G}$.

Приклад 8.6. Нелінійний індуктивний елемент має вебер-амперну характеристику $\Psi = L(i - ai^3)$. Знайти середній комплексний опір та середню індуктивність.

Розв'язання. Виводимо елементне рівняння $u_L = d\Psi/dt = (L - 3aLi^2) di/dt$. Нехай $i = I_m \cos \omega t \leftrightarrow \underline{I} = I_m$. Тоді $u_L = \omega L I_m \left[(1 - 0,75 a I_m^2) \cos(\omega t + \pi/2) + 0,75 a I_m^2 \sin 3\omega t \right]$. Знаходимо комплексну амплітуду першої гармоніки напруги, середній комплексний опір та середню індуктивність:

$$\underline{U}_{L1} = j\omega L \left(1 - \frac{3}{4} a I_m^2 \right) I_m, \quad \tilde{Z} = \frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{I}} = j\omega L \left(1 - \frac{3}{4} a I_m^2 \right), \quad (8.12)$$

$$\tilde{L} = L \left(1 - \frac{3}{4} a I_m^2 \right) = L(1 - k I_m^2).$$

КМ 8.3. Виконати завдання з підрозділу 8.6.2.

Приклад 8.7. Розрахувати та побудувати резонансні криві контура з нелінійною індуктивністю (див. рис. 8.10), застосовуючи квазілінійний метод. Параметри індуктивності такі, як у прикладі 8.6.

Розв'язання. Резонансна крива описується рівнянням (8.19), а узагальнене розстроєння – згідно з (8.20), причому в нашому випадку замість L слід брати середню індуктивність \tilde{L} (8.12). Тоді резонансна частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}C}} = \frac{1}{\sqrt{LC(1 - kI_m^2)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - kI_m^2}}, \quad (8.13)$$

де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — резонансна частота у малосигнальному режимі, коли $kI_m^2 \ll 1$. Отже, ω_p зростає зі збільшенням амплітуди струму, що пояснюється зменшенням середньої індуктивності завдяки насиченню осердя. Далі знаходимо узагальнене розстроєння

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\omega\tilde{L} - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \left[\frac{\omega}{\omega_0} (1 - kI_m^2) - \frac{1}{\omega_0 \omega LC} \right] = \\ &= Q_0 \left[\frac{\omega}{\omega_0} (1 - kI_m^2) - \frac{\omega_0}{\omega} \right] \approx Q_0 \left[\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} - kI_m^2 \right], \end{aligned}$$

де $Q_0 = \omega_0 L/R$ — добротність контура в малосигнальному режимі. Підставивши цей вираз у (8.19), отримаємо

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} - kI_m^2 \right)^2}}. \quad (8.14)$$

Із іншого боку, струм у контурі також залежить від розстроєння, а саме $I_m = I_{mp} n_1$, де I_{mp} — амплітуда струму при резонансі. Позначивши $kI_m^2 = kI_{mp}^2 n_1^2 = \gamma n_1^2$, з (10.14) знаходимо

$$\chi = Q_0 \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\pm \sqrt{1 - n_1^2}}{n_1} + \gamma Q_0 n_1^2.$$

За цим виразом на рис. 10.16 побудовані *резонансні криві нелінійного контура* $n_1(\chi)$ при різних значеннях параметра $\gamma Q_0 = kQ_0 I_{mp}^2$, тобто при різних I_{mp} . У малосигнальному режимі, коли $\gamma \approx 0$, резонансна крива не відрізняється від такої в лінійного контура. При збільшенні параметра γQ_0 максимум зміщується

на частоту $\omega_p > \omega_0$, що узгоджується з (8.13). Після проходження максимуму зі збільшенням частоти спостерігається різкий спад кривої. Це пояснюється тим, що індуктивний опір $X_L = \omega \tilde{L}(I_m)$ зростає завдяки зростанню не тільки частоти, а й індуктивності при зменшенні струму [див. (10.12)]. При подальшому збільшенні I_{mb} криві стають неоднозначними.

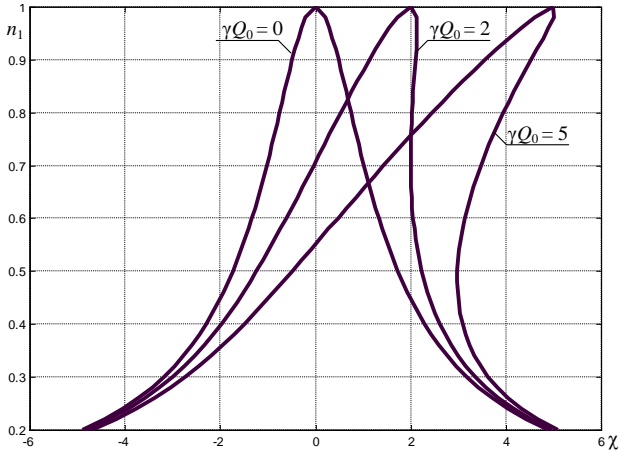


Рис. 8.16

8.5.3. Метод повільно змінних амплітуд

Квазілінійний метод застосовується для аналізу усталених режимів коливань, а для дослідження нестационарних режимів у квазілінійних колах користуються іншим наближеним методом — *методом усереднення*, або *повільно змінних амплітуд*. Цей метод базується на двох припущеннях: у вузькосмуговому колі виділяється лише перша гармоніка коливання; амплітуда коливання змінюється досить повільно. Останнє пояснимо на прикладі. У високочастотному, а отже, у вузькосмуговому контурі вільні коливання описуються виразом (8.10).

Амплітуда змінюється у часі як $U_m(t) = U_0 e^{-\delta t}$. Її похідна $dU_m/dt = -\delta U_0 e^{-\delta t} = -\delta U_m = -U_m \omega_0/2Q$, де $\delta = R/2L = \omega_0/2Q$. При $Q \gg 1$ маємо

$$\left| \frac{dU_m}{dt} \right| \ll \omega_0 U_m. \quad (8.15)$$

Аналогічно доводиться нерівність $|d^2U_m/dt^2| \ll \omega_0 |dU_m/dt|$. Нерівності (10.15) розглядатимемо як критерії повільності зміни амплітуди. Застосування методу усереднення пояснимо на прикладі.

Приклад 8.8. Проаналізувати процеси усталення коливань у схемі (див. рис. 8.9).

Розв'язання. У прикладі 8.4 показано, що схема (див. рис. 8.9) в малосигнальному режимі поводить себе як резонансний контур (див. рис. 8.13) з від'ємним опором втрат. За цих умов коливання у контурі починають зростати. Такий процес називають самозбудженням, а коло, здатне самозбуджуватися, — автогенератором. Коли амплітуда коливань досягне величини, за якої почне виявлятися нелінійність, малосигнальна схема (див. рис. 8.13, а) стає непридатною. Щоб отримати адекватну модель аналізованого кола, потрібно диференціальну провідність G_d змінити на середню \tilde{G} . Тоді у схемі, зображеній на рис. 8.13, б, $R'_n = \tilde{G} \rho^2$. Складаємо рівняння, аналогічне (4.6):

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta_e \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0, \quad (8.16)$$

де $\delta_e = [R + \tilde{G}(U_m)\rho^2]/L$. Вважаючи контур квазілінійним колом, шукатимемо розв'язання цього нелінійного рівняння у вигляді $u_c = U_m(t) \sin \omega_0 t$, де $U_m(t)$ — невідома функція, проте така, що відповідає критеріям повільності (8.15). Знаходимо похідні:

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= U_m(t) \omega_0 \cos \omega_0 t + \frac{dU_m(t)}{dt} \sin \omega_0 t, \\ \frac{d^2 u_c}{dt^2} &= -\omega_0^2 U_m(t) \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \frac{dU_m(t)}{dt} \cos \omega_0 t + \frac{d^2 U_m(t)}{dt^2} \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Застосовуючи критерії (10.15), можемо спростити ці вирази:

$$\frac{du_c}{dt} \approx U_m(t) \omega_0 \cos \omega_0 t, \quad \frac{d^2 u_c}{dt^2} \approx -\omega_0^2 U_m(t) \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \frac{dU_m(t)}{dt} \cos \omega_0 t.$$

Підставивши u_c та його похідні у (10.16), отримаємо

$$\frac{dU_m}{dt} + \delta_e U_m = 0. \quad (8.17)$$

Отже, маємо рівняння для визначення функції $U_m(t)$, яке на порядок менше від вихідного рівняння. Для подальшого аналізу потрібно визначити

функцію $\delta_e(U_m)$. ВАХ тунельного діода відносно початкової робочої точки, яка розташована на спадній ділянці, добре апроксимується поліномом $i = \sigma_1 U + \sigma_3 U^3$. Матимемо від'ємну диференціальну провідність $G_d = \sigma_1 + 3\sigma_3 U^2 < 0$, коли $\sigma_1 < -3\sigma_3 U^2$. Знаходимо середню провідність (див. прикл. 10.5):

$$\tilde{G}(U_m) = \sigma_1 + 0,75\sigma_3 U_m^2,$$

а також $\delta_e(U_m) = [R + \rho^2(\sigma_1 + 0,75\sigma_3 U_m^2)]/L = a_1 + a_3 U_m^2$. Тепер рівняння (10.17) набуває вигляду $dU_m/dt = -(a_1 U_m + a_3 U_m^3) = f(U_m)$. Якщо $a_1 = R/L + \rho^2\sigma/L < 0$, або

$$\sigma_1 < -R/\rho^2, \quad (8.18)$$

графік функції $f(U_m)$ матиме вигляд, показаний на рис. 8.17, на якому є дві точки рівноваги: нестійкої — точка 0 і стійкої — точка A .

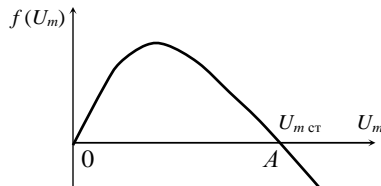


Рис. 8.17

Отже, за умовою (8.18), яка називається умовою самозбудження, коливання виникають самочинно, їх амплітуда зростає, доки не досягне величини стаціонарної амплітуди $U_{мст}$ точка A . Осцилограму процесу усталення коливань зображено на рис. 8.18, а.

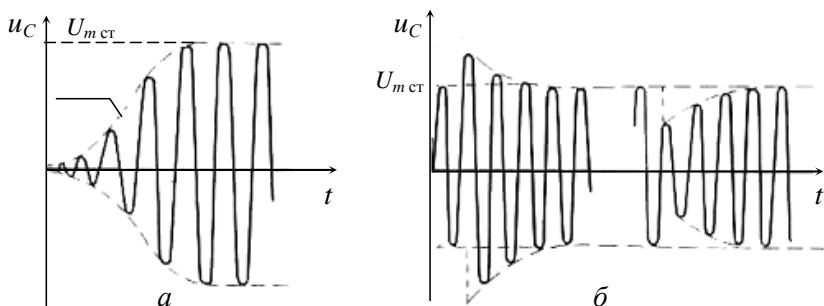


Рис. 8.18

Якщо в режимі усталених коливань будь-яке збурення спричиняється зміною амплітуди коливань порівняно з $U_{m \text{ ст}}$, то надалі ця амплітуда відновлюється, як показано на рис. 8.18, б. Справді, якщо $U_m > U_{m \text{ ст}}$, то $dU_m/dt = f(U_m) < 0$ (див. рис. 8.17), тобто зменшується. Якщо ж $U_m < U_{m \text{ ст}}$, то $dU_m/dt > 0$ і U_m збільшується.

8.6. Параметричні кола

8.6.1. Рівняння і властивості параметричних кіл

Параметричними називають кола, у яких хоча б один параметр змінюється у часі. Зміни параметрів кола можуть бути цілеспрямованими на досягнення певного ефекту обробки сигналу або ж випадковими, зумовленими нестабільністю параметрів компонентів кола. Якщо параметри схемних елементів змінюються в часі, а саме

$$u = R(t)i, \quad q = C(t)u, \quad \Psi = L(t)i,$$

елементні рівняння параметричних елементів набувають такого вигляду:

$$u = R(t)i, \quad i = G(t)u, \quad i = C \frac{du}{dt} + u \frac{dC}{dt}, \quad u = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}. \quad (8.19)$$

Зауважимо, що у параметричній ємності навіть за постійної напруги протікає струм, зумовлений другим доданком в (8.19). Також і в параметричній індуктивності з'являється напруга на постійному струмі. Отже, реактивні

параметричні елементи можуть бути джерелами електричних коливань, тобто є активними елементами.

Технічна реалізація параметричних компонентів радіоелектронних кіл будується на різноманітних принципах. Прикладом механічного способу зміни в часі опору є вугільний, а ємності — конденсаторний мікрофони. Тут опір і ємність змінюються завдяки коливанням мембрани. Але частіше застосовують електричне керування параметрами. Один з основних методів реалізації параметричних елементів, який вже розглядався у п. 8.1.1, полягає в наступному. Якщо у малосигнальному режимі переміщувати робочу точку по характеристиці нелінійного елемента, змінюватимуться відповідні диференціальні параметри. Отже, відносно малого сигналу нелінійний елемент поводить як параметричний. Це пояснює рис. 10.19, на якому показані: *a* — ВАХ, *б* — залежність диференціальної провідності від напруги, *в* — осцилограма струму, *г* — осцилограма диференціальної провідності. Як бачимо, напруга великого рівня є керуючою. Під її дією змінюється в часі положення робочої точки для коливання малого рівня, а отже, й диференціальна провідність. Нехай ВАХ описується функцією $i = f(u)$ і нехай $u = u_k + u_c$, де u_k — керуюча напруга, u_c — напруга сигналу. Розкладаючи функцію $i = f(u_k + u_c)$ в ряд Тейлора відносно точки $u = u_k$ і нехтуючи членами вищих порядків малості за умови $U_k \gg U_c$, отримаємо $i \approx f(u_k) + f'(u_k)u_c = i_k + i_c$, звідки знаходимо складову струму, зумовлену дією сигналу:

$$i_c = f'(u_k)u_c = G_d(t)u_c, \quad (8.20)$$

де $G_d(t) = f'(u_k(t))$ — диференціальна провідність як функція часу.

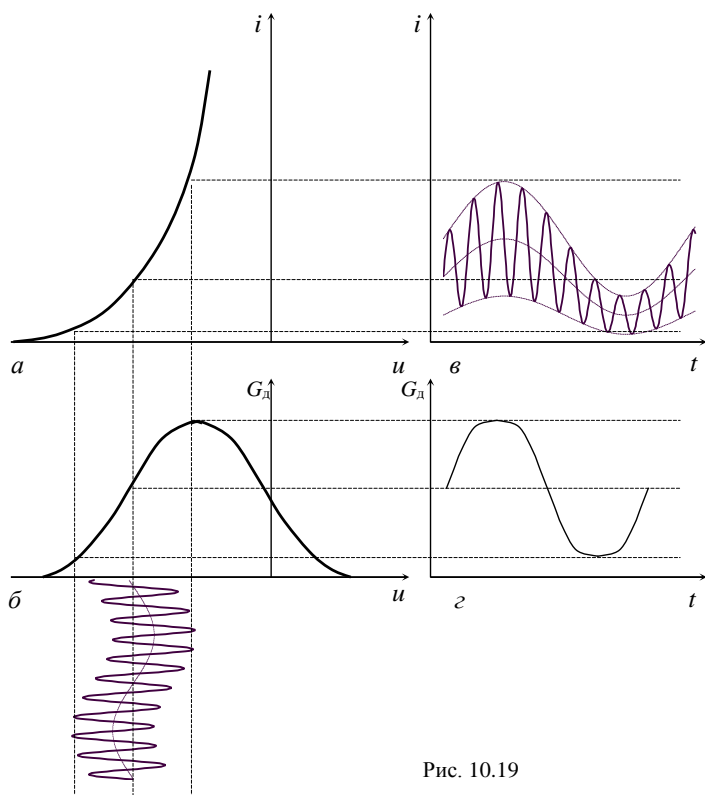


Рис. 10.19

Рис. 8.19

Нехай у (8.20) $u_c = U_m \cos(\omega_c t + \varphi_c)$, а $G_d(u)$ є періодичною функцією, яку можна розкласти у ряд Фур'є: $G_d(t) = G_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(n\omega_k t + \varphi_k)$. Тоді:

$$i_c = 0,5U_m G_0 \cos(\omega_c t + \varphi_c) + 0,5U_m \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos((\omega_c + n\omega_k)t + \varphi_c + \varphi_k) + 0,5U_m \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos((\omega_c - n\omega_k)t + \varphi_c - \varphi_k). \quad (8.21)$$

Згідно з (8.21) у спектрі струму параметричної провідності з'являються

складові на комбінаційних частотах:

$$\omega_{\text{комб}} = \omega_c \pm n\omega_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.22)$$

Порівнюючи (8.22) із (8.27), помічаємо, що на відміну від нелінійного кола у параметричному колі у спектрі комбінаційних частот відсутні вищі гармоніки сигналу. Відмічаємо також, що амплітуди гармонік струму в (8.21) пропорційні амплітуді напруги, що характерне для лінійних кіл. Ще важливіша подібність параметричних та лінійних кіл полягає у виконанні принципу накладання. Так, якщо в (8.20) $u_c = \sum_{k=1}^n u_{ck}$, то $i_c = G_D(t) \sum_{k=1}^n u_{ck} = \sum_{k=1}^n i_{ck}$, де $i_{ck} = G_D(t) u_{ck}$ — реакція на дію кожної складової напруги окремо.

КМ 8.4. Виконати завдання з підрозділу 8.6.3.

8.6.2. Процеси в параметричних колах

Як вже показано, реактивні параметричні елементи перетворюють енергію генератора накачки — джерела, модулюючого реактивний параметр, в енергію електричних коливань. Щоб збагнути цей механізм, розглянемо процеси у параметричній ємності. Енергія в ємності $W_C = q^2/2C$, звідки

$$\Delta W_C = -\frac{q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.23)$$

Отже, при зменшенні ємності ($\Delta C < 0$) енергія зростає ($\Delta W_C > 0$). Це можна пояснити так. Нехай ємність зменшується через розсування пластин конденсатора. Але при цьому слід виконати роботу проти дії сил притягання зарядів на пластинах, що приводить до зростання енергії. При цьому також зміниться напруга:

$$\Delta u_C = -\frac{q}{C^2} \Delta C = -\frac{u}{C} \Delta C, \quad (8.24)$$

так що при зменшенні ємності напруга збільшується. Нехай до ємності прикладено змінну напругу, і, коли напруга досягає амплітудного значення, ємність стрибкоподібно зменшується (рис. 8.20). Це приводить до збільшення напруги та енергії. А в момент, коли напруга і заряд дорівнюють нулю, ємність стрибком збільшується. Але це згідно з (8.23) і (8.24) не приводить до зміни напруги та енергії. Так відбувається передача енергії від джерела, модулюючого

ємність, в електричне коло. В реальних параметричних колах параметри змінюються не стрибкоподібно, а звичайно — за гармонічним законом. Перш ніж перейти до аналізу такого режиму, зробимо деякі зауваження. Нехай на вході довільного двополюсника напруга $u = U_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ і струм $i = I_m \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. При цьому миттєва потужність

$$p(t) = U_m I_m \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ = 0,5 U_m I_m [\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2)]$$

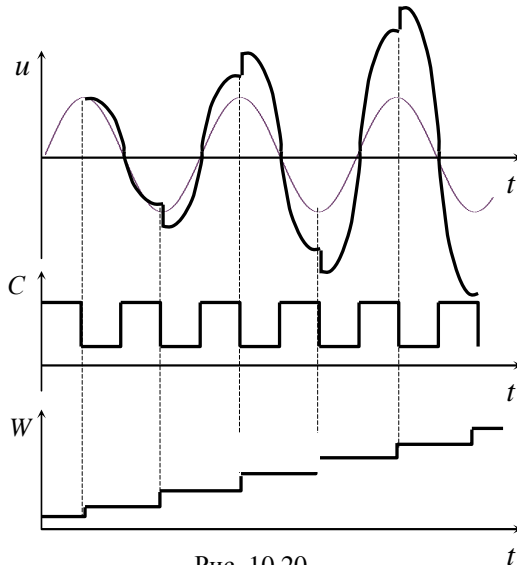


Рис. 8.20

Середня потужність не дорівнюватиме нулю, якщо миттєва потужність матиме постійну складову. Це станеться, якщо $\omega_1 = \omega_2$ і $\varphi_1 - \varphi_2 \neq \pm \pi/2$. Тоді $P_{cp} = 0,5 U_m I_m \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Розглянемо ємність, у якої

$$u(t) = U_m \cos(\omega_c t + \varphi_c), \quad C(t) = C_0 [1 + \beta \cos(\omega_n t + \varphi_n)]$$

де $\beta = \Delta C / C_0$, C_0 і ΔC — відповідно стала і змінна складова ємності, ω_n — частота накачки, ω_c — частота сигналу. Згідно з (10.19) струм ємності

$$i(t) = -\beta\omega_n C_0 U_m \sin(\omega_n t + \varphi_n) \cos(\omega_c t + \varphi_c) - \omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c) - \\ - \beta\omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_c) \cos(\omega_n t + \varphi_n).$$

Після тригонометричних перетворень одержимо

$$i(t) = \omega_c C_0 U_m \cos(\omega_c t + \varphi_c + \pi/2) + \\ + 0,5\beta C_0 U_m (\omega_c - \omega_n) \sin((\omega_n - \omega_c)t + \varphi_n - \varphi_c) - \\ - 0,5\beta C_0 U_m (\omega_c + \omega_n) \sin((\omega_n - \omega_c)t + \varphi_n + \varphi_c). \quad (8.25)$$

Параметрична ємність є активним елементом, якщо її середня потужність відмінна від нуля. Для цього потрібно, щоб у складі струму (8.25) був доданок із частотою ω_c та початковою фазою, відмінною від $\varphi_c \pm \pi/2$. Ці умови виконуються, якщо $\omega_n = 2\omega_c$. Тоді у складі струму матимемо складову

$$i_a(t) = -0,5\beta\omega_c C_0 U_m \sin(\omega_c t + \varphi_n - \varphi_c),$$

миттєва потужність якої

$$p_a(t) = -u(t)i(t) = 0,5\beta\omega_c C_0 U_m^2 \cos(\omega_c t + \varphi_c) \sin(\omega_c t + \varphi_n - \varphi_c) = \\ = 0,25\beta\omega_c C_0 U_m^2 [\sin(2\omega_c t + \varphi_n - \sin(2\omega_c - \varphi_n))],$$

а середня за період сигналу потужність

$$P_{cp} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} P_a(t) dt = -\frac{\beta\omega_c C_0 U_m^2}{4} \sin(2\varphi_c - \varphi_n).$$

Енергія надходить від параметричної ємності, якщо $P_{cp} > 0$, причому максимальне значення P_{cp} досягається при $2\varphi_c - \varphi_n = -\pi/2$, або $\varphi_n = 2\varphi_c + \pi/2$. Отже, оптимальний режим накачки маємо, коли $C(t) = C_0 [1 + \beta \cos(2\omega_c t + 2\varphi_c + \pi/2)]$ Такому режимові відповідає рис. 10.21, на якому

$$u(t) = U_m \sin(\omega_c t) = U_m \cos(\omega_c t - \pi/2),$$

$$C(t) = C_0 [1 + \beta \sin(2\omega_c t - \pi/2)] = C_0 [1 + \beta \cos(2\omega_c t - \pi + \pi/2)]$$

Як бачимо, ємність зменшується, коли напруга найбільша, і зростає, коли напруга мала, що відповідає процесам, пояснення яким дає рис. 8.20. При $\omega_n = 2\omega_c$ та $\varphi_n = 2\varphi_c + \pi/2$ у складі струму (8.25) будуть дві складові на частоті сигналу:

$$i_c(t) = \omega_c C_0 U_m \cos\left(\omega_c t + \varphi_c + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\beta\omega_c C_0 U_m}{2} \cos(\omega_c t + \varphi_c).$$

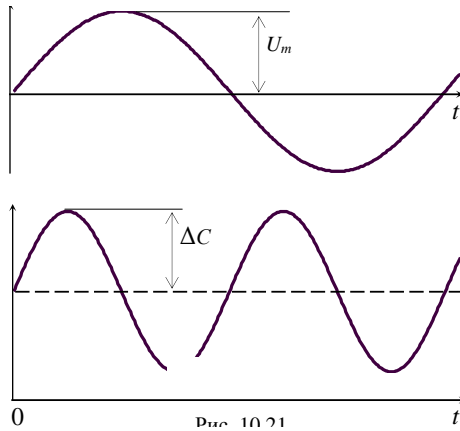


Рис. 8.21

Перший доданок є реактивною i_p , а другий — активною i_a складовими струму. Цьому рівнянню відповідає схема заміщення параметричного конденсатора на частоті сигналу (див. рис. 10.22), причому внесений активний опір

$$R_{\text{вн}} = -\frac{2}{\beta \omega_c C_0}.$$

Оскільки рівняння параметричних ємності та індуктивності (8.19) дуальні, аналіз процесів в останній дає співвідношення, дуальні отриманим для параметричної ємності.

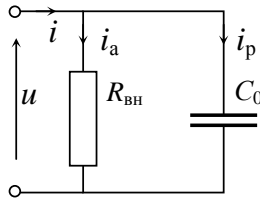


Рис. 8.22

8.7. Порівняльна характеристика електричних кіл

Завершуючи цей курс, присвячений вивченню властивостей електромагнітних кіл, процесів у них та їх математичного моделювання, розглянемо можливості кіл різних видів — лінійних і нелінійних, інерційних і неінерційних, розподілених і параметричних з погляду їх застосування для оброблення сигналів. У розділі 3 показано, що в лінійних неінерційних колах усі змінні реакції пропорційні змінній дії, так що сигнал на виході є пропорційним вхідному сигналу. Отже, такі кола можуть виконувати тільки одне *перетворення сигналу* — *масштабне*, тобто змінювати його величину при незмінних формі та спектрі. Пристрої, які виконують масштабне перетворення сигналів, називаються *атенюаторами*. Лінійні неінерційні кола застосовуються також як допоміжні кола, що забезпечують потрібний режим роботи електронних приладів.

У лінійних інерційних колах із зосередженими параметрами, які вивчались у розділах 4–7, змінюється як форма, так й спектр сигналу. При цьому зміна форми є проявом інерційності. Ця властивість використовується для формування сигналів, тобто надання сигналу певної потрібної форми. Інерційність використовується також у часозадаючих колах, які забезпечують часову затримку між моментом подачі сигналу на вхід і моментом досягнення певного рівня сигналом на виході. Такі кола застосовуються, наприклад, в імпульсних генераторах. Проявом інерційності є також залежність від частоти передавальних функцій кола, що використовується для реалізації електричних фільтрів. Інерційність у режимі гармонічних коливань спричиняється до певних амплітудно-фазових співвідношень, що використовується у таких пристроях, як генератори гармонічних коливань, фазових і частотних модуляторів й детекторів. Лінійні інерційні кола мають здатність трансформувати опір навантажень, що використовується для їх узгодження із джерелами. Підсумовуючи, можна вказати такі основні процеси оброблення сигналів у

лінійних інерційних колах: фільтрація або частотна селекція сигналів, формування та трансформування сигналів. Зауважимо, що всі процеси, зумовлені інерційністю, пов'язані між собою. Так, формування сигналів неминуче супроводиться фільтрацією їх спектра і навпаки.

Лінійні розподілені кола (див. розділ 8) мають те саме застосування, що й лінійні інерційні зосереджені кола. Їх використання визначається діапазоном робочих частот. На досить високих частотах, коли довжина хвилі сумірна з розмірами кола, стає конструктивно та технологічно доцільним реалізовувати фільтруючі, формуючі та трансформуючі пристрої у вигляді довгих ліній та їх відрізків. Лінійні розподілені кола застосовують також як фідери для передачі сигналів на відстані, більші за довжину хвилі.

Застосування нелінійних неінерційних кіл базується на їх властивості змінювати форму сигналів, що супроводиться збагаченням спектра новими складовими, як показано у розділі 9. Це використовується у таких найважливіших процесах, як модуляція, детектування, перетворення та помноження частоти. Крім того, в нелінійних колах можна отримати підсилення та генерування коливань. Отже, функціональні можливості нелінійних кіл значно ширші, ніж лінійних. Нелінійні інерційні та параметричні кола поєднують можливості як лінійних інерційних кіл, так і нелінійних неінерційних, тобто мають найширше застосування. В них реалізуються процеси формування, перетворення спектра та фільтрації. Нелінійні кола з від'ємним опором та параметричні кола є активними, бо вони здатні збільшувати енергію коливань. Це дає можливість реалізувати підсилення та генерування коливань.

Поза межами цього курсу залишилися нелінійні розподілені та нелінійні параметричні кола. Це зумовлено тим, що теорія таких кіл доволі складна і мало розроблена, а їх реалізація є технічно складною.

8.8. Комп'ютерне моделювання

8.8.1. Параметри і характеристики нелінійних елементів

Метою комп'ютерного моделювання є:

- вивчення методики вимірювання вольт-амперних характеристик нелінійних елементів у ручному та автоматичному режимах;
- дослідження вольт-амперних характеристик різних видів напівпровідникових діодів;
- вивчення методики вимірювання статичних і диференціальних параметрів нелінійних елементів;

- дослідження залежності статичних і диференціальних параметрів від положення робочої точки на вольт-амперній характеристиці.

1. Дослідити вольт-амперні характеристики напівпровідникових діодів, склавши схему, зображену на рис. 8.42. В автоматичному режимі вимірювань перемикачем S4 треба підімкнути функціональний генератор, який генерує пилоподібну напругу, що змінюється в часі за лінійним законом, до кола: опір R1 — діод, як зображено на рис. 8.42. Перемикачами S1, S2, S3 у коло генератора вмикається один із досліджуваних діодів: випрямний діод, випромінювальний діод, стабілітрон. Напруга з діода подається на вхід В осцилографа. Напруга, що пропорційна струму діода, яка знімається із джерела напруги, керованого струмом Т, надходить на вхід А. В режимі розгортки А/В на екрані осцилографа відобразиться вольт-амперна характеристика діода.

Зняти ВАХ кожного з діодів. Для зручності переключити осцилограф у розгорнуте зображення.

Для зняття ВАХ у ручному режимі потрібно перемикачем S4 підімкнути джерело постійної напруги E1. При цьому до діода підключиться вольтметр, а в коло діодів послідовно вмикається амперметр. Змінюючи напругу джерела дискретно, зняти показання приладів, за якими побудувати вольт-амперні характеристики кожного з досліджуваних діодів.

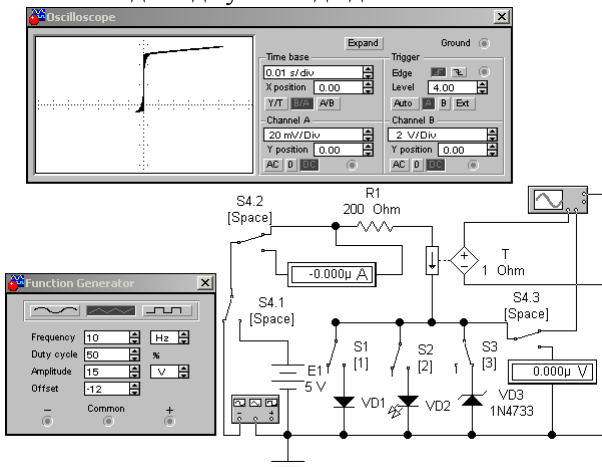


Рис. 8.42

2. Дослідити залежності статичного і диференціального опорів випрямного діода і стабілітрона від величини постійної складової струму. Для цього скласти схему, зображену на рис. 9.43, в якій послідовно з досліджуваним діодом і баластним опором R ввімкнено джерела змінної $E1$ і постійної $E2$ напруги. Встановити величину змінної напруги 20 мВ. Амперметр $A1$ і вольтметр $V1$ перемкнути в режим постійного струму DC, а $A2$ і $V2$ — в режим змінного струму AC. За показаннями приладів розрахувати статичний і диференціальний опори: $R_0 = U_0 / I_0$, $R_d = \Delta u / \Delta i$. Змінюючи постійну напругу джерела $E2$, визначити ці опори в кількох робочих точках. Побудувати залежності статичного і диференціального опорів від величини постійного струму. Пояснити отримані результати. Для цього потрібно показати положення робочих точок, в яких визначалися статичний і диференціальний опори, на вольт-амперних характеристиках, знятих у п. 1.

Спостерігати осцилограми змінних складових напруги і струму. Для цього перемкнути входи осцилографа в режим AC вимірювання змінних складових (закритий вхід). Переконавшись, що в малосигнальному режимі струм і напруга мають форму коливальних, близьку до гармонічної. Збільшити амплітуду напруги джерела $E1$ і спостерігати перехід у нелінійний режим великого сигналу, коли з'являються помітні нелінійні спотворення.

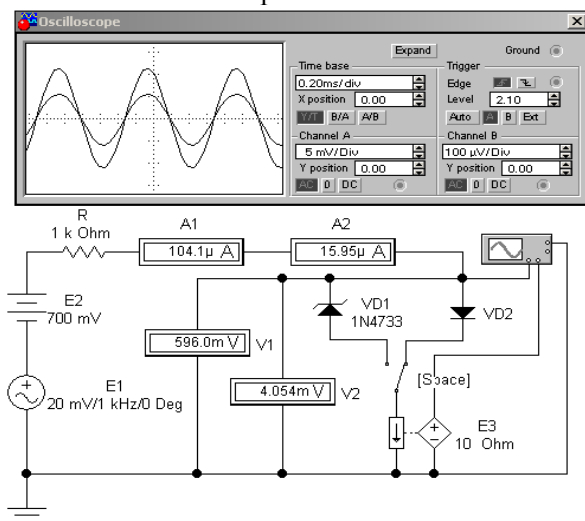


Рис. 8.43

3. Скласти схему параметричного стабілізатора напруги на стабілітроні (див. рис. 8.44). Встановити параметри схеми, задані в прикладі 8.1. Розрахувати постійну і змінну складові вихідної напруги за формулами, виведеними у прикладі 8.1. Виміряти ці напруги у схемі, зображений на рис. 8.44, і порівняти з розрахованими.

8.8.2. Характеристики і параметри біполярних транзисторів

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- методики вимірювання характеристик і параметрів біполярних транзисторів;
- статичних входних і вихідних характеристик біполярних транзисторів;
- роботи біполярних транзисторів в імпульсному режимі.

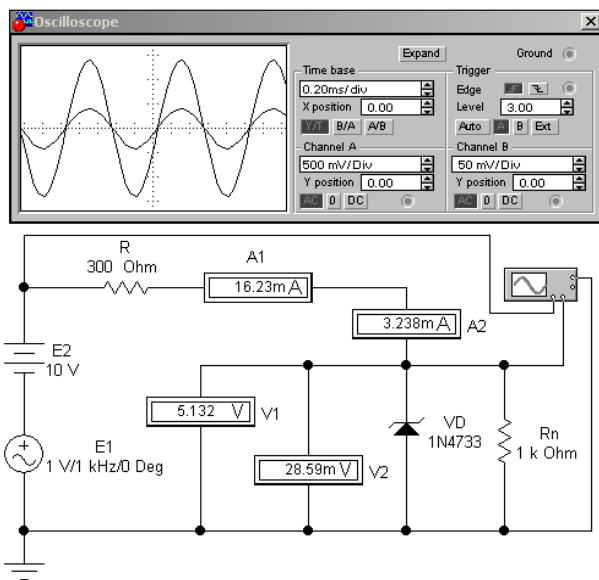


Рис. 8.44

1. Дослідити входні характеристики біполярних транзисторів, склавши схему, показану на рис. 8.45.

Вивчити методику спостереження характеристик транзисторів за допомогою осцилографа. Перемикачем S1 до входу транзистора підімкнути генератор лінійно змінної у часі (пилкоподібної) напруги з амплітудою 5 В, частотою 100 Гц і напругою зміщення (offset) 5 В. У цій схемі на вхід каналу А осцилографа подається напруга на переході база-емітер, а на вхід каналу В — напруга, пропорційна струму бази, від перетворювача струм-напруга Т1. Якщо перемкнути генератор розгортки осцилографа у режим А/В, на екрані спостерігатиметься вхідна характеристика транзистора. Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа вхідну характеристику транзистора, користуючись масштабом по осях на екрані. Для більшої зручності бажано перевести осцилограф у розширене зображення.

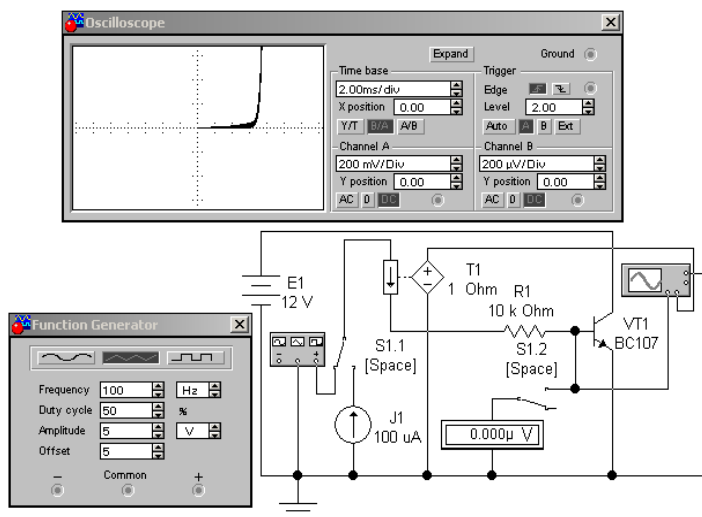


Рис. 8.45

Зняти вхідну характеристику транзистора за допомогою вольтметра і амперметра. Перемикачем S1 до кола бази підімкнути джерело постійного струму J1. Одночасно ввімкнеться вольтметр паралельно переходу база-емітер. Змінюючи струм джерела, потрібно вимірювати і записувати показання вольтметра і значення сили струму джерела. Струм джерела змінювати через 50 мкА від 50 до 200 мкА і через 100 мкА від 200 до 1000 мкА. Вимірювання виконати при двох величинах напруги джерела живлення E1: 12 і 24 В.

Побудувати за результатами вимірювань графіки входної характеристики транзистора для двох величин напруги колектор-емітер.

Визначити входний опір транзистора за формулою

$$h_{11E} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}, \quad (8.26)$$

де ΔU_{BE} , ΔI_B — прирости напруги база-емітер і струму бази на входній характеристиці транзистора.

2. Дослідити вихідні характеристики біполярного транзистора, склавши схему, зображену на рис. 8.46. Перемикачем S1 до колектора транзистора підімкнути генератор лінійно змінної у часі (пилкоподібної) напруги з амплітудою 15 В, частотою 100 Гц і напругою зміщення (*offset*) 14,5 В. Одночасно до колектора підімкнеться осцилограф. У цій схемі на вхід каналу А подається напруга на переході колектор — емітер, а на вхід каналу В — напруга, пропорційна струму колектора, що знімається з перетворювача струм-напруга T1. Якщо перемикнути генератор розгортки осцилографа в режим А/В, на екрані спостерігатиметься вихідна характеристика транзистора.

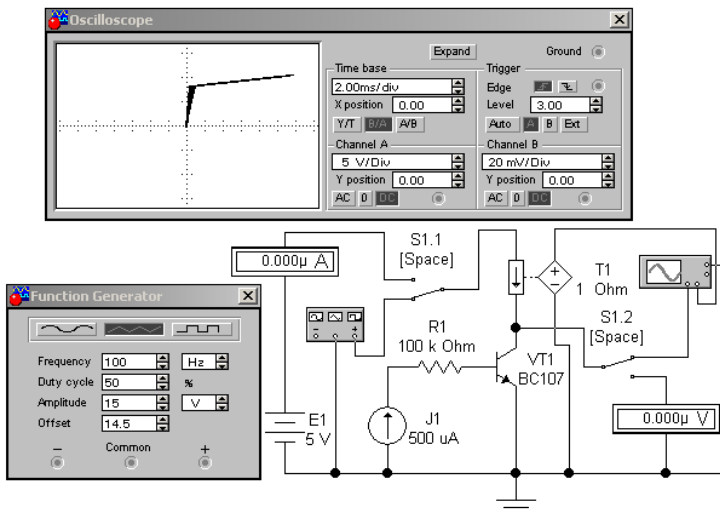


Рис. 8.46

Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа вихідну характеристику транзистора, користуючись масштабом по осях на екрані за таких значеннях струму бази: 100, 300, 500 мкА, який генерує джерело струму J1.

Зняти вихідні характеристики транзистора за допомогою вольтметра і амперметра. Для цього перемикачем S1 до колектора підімкнути джерело постійної напруги E1 послідовно з амперметром, який вимірює струм колектора. Водночас до колектора підімкнеться вольтметр, який вимірює напругу колектор-емітер. Установити джерелом J1 струм бази 100 мкА. Змінюючи напругу джерела E1 від 0 до 0,5 В через 0,1 В, потім від 0,5 до 5 В через 0,5 В, вимірювати напругу колектор-емітер і струм колектора. Повторити виміри при струмах бази 300 і 500 мкА. За результатами вимірювань побудувати вихідні характеристики транзистора при різних струмах бази. Визначити коефіцієнт передачі струму бази

$$h_{21E} = \frac{\Delta I_K}{\Delta I_B}, \quad (8.27)$$

де $\Delta I_K, \Delta I_B$ — прирости струмів колектора і бази за умови $U_{KE} = 5$ В, а також вихідну провідність транзистора

$$h_{22E} = \frac{\Delta I_K}{\Delta U_{KE}}, \quad (8.28)$$

де $\Delta I_K, \Delta U_{KE}$ — прирости струму колектора і напруги колектор-емітер за умови $I_B = 300$ мА.

3. Виміряти h -параметри біполярного транзистора, склавши схему, зображену на рис. 9.47, в якій до кола колектора ввімкнено джерела змінної E1 і постійної E2 напруг, а також амперметри постійного струму A1 і змінного струму A2. У колі бази ввімкнено паралельно джерела постійного струму J1 і змінного струму J2. Вольтметри постійної напруги V1 і змінної напруги V2 перемикачем S1 можна підімкнути до колектора або до бази. Перемикачем S2 можна підключати вхід А осцилографа до перетворювачів струм-напруга T1 і T2, що дає змогу спостерігати осцилограми змінних складових струмів колектора і бази. Вхід В осцилографа перемикається разом із вольтметрами перемикачем S1, що дає змогу спостерігати осцилограми змінних складових відповідних напруг. Зауважимо, що входи осцилографів потрібно перемикнути у режим АС спостереження змінних складових напруг. Слід також переконатися, що в малосигнальному режимі

струми і напруги всіх електродів транзистора мають форму гармонічних коливань.

Для вимірювання h -параметрів потрібно виміряти змінні складові струмів і напруг електродів транзистора і розрахувати h -параметри за формулами

$$\begin{aligned} h_{11E} &\approx \Delta u_{BE} / \Delta i_B, h_{21E} \approx \Delta i_K / \Delta i_B, u_{KE} = \text{const}; \\ h_{12E} &\approx \Delta u_{BE} / \Delta u_{KE}, h_{22E} \approx \Delta i_K / \Delta u_{KE}, i_B = \text{const}, \end{aligned} \quad (8.29)$$

в яких прирости струмів і напруг дорівнюють їх змінним складовим.

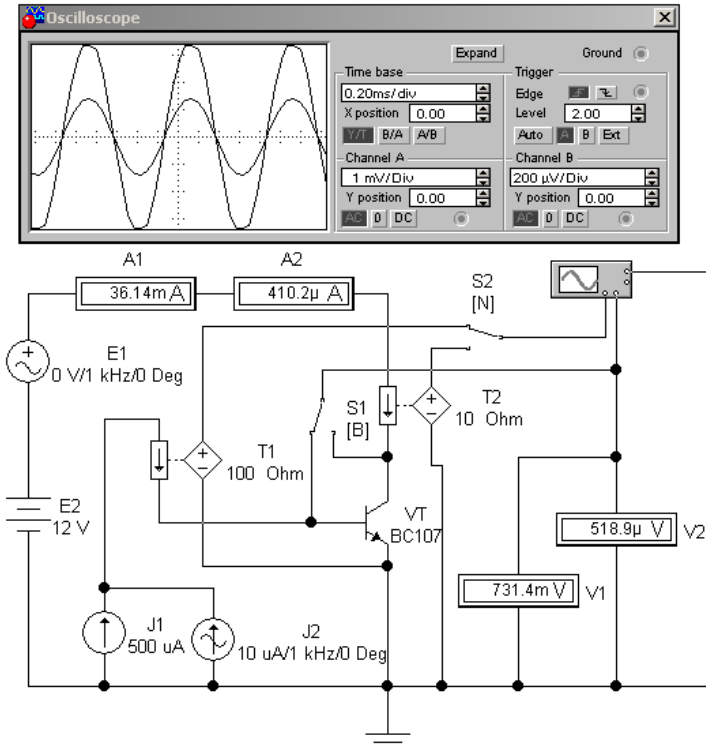


Рис. 8.47

Для вимірювання параметрів h_{1E} , h_{21E} потрібно встановити змінну напругу джерела E1, що дорівнює нулеві (умова $u_{KE} = \text{const}$). Подати на базу суму постійної і змінної складових струму від джерел J1 і J2 і виміряти змінні складові струму колектора і напруги бази. Розрахувати параметри h_{1E} , h_{21E} за формулами першого рядка (8.29).

Дослідити залежність параметрів h_{1E} , h_{21E} від положення робочої точки на характеристиках транзистора. Для цього виміряти параметри для кількох величин напруги джерела E2: 6, 12, 18 В і різних постійних складових струму бази: 200 мкА, 500 мкА і 1 мА, який задається джерелом J1.

Для вимірювання параметрів h_{12E} , h_{22E} потрібно встановити змінну напругу джерела E1, що дорівнює 100 мВ. Подати на базу струм від джерел J1 при змінній складовій струму джерела J2, що дорівнює нулю (умова $i_B = \text{const}$), і виміряти змінні складові струму колектора і напруги бази. Розрахувати параметри h_{12E} , h_{22E} за формулами другого рядка (8.29).

Дослідити залежність параметрів h_{12E} , h_{22E} від положення робочої точки на характеристиках транзистора. Для цього виконати виміри параметрів для кількох значень напруги джерела E2: 6, 12, 18 В і різних постійних складових струму бази: 200 мкА, 500 мкА і 1 мА, який задається джерелом J1.

4. Дослідити біполярний транзистор в імпульсному режимі, склавши схему, зображену на рис. 9.48.

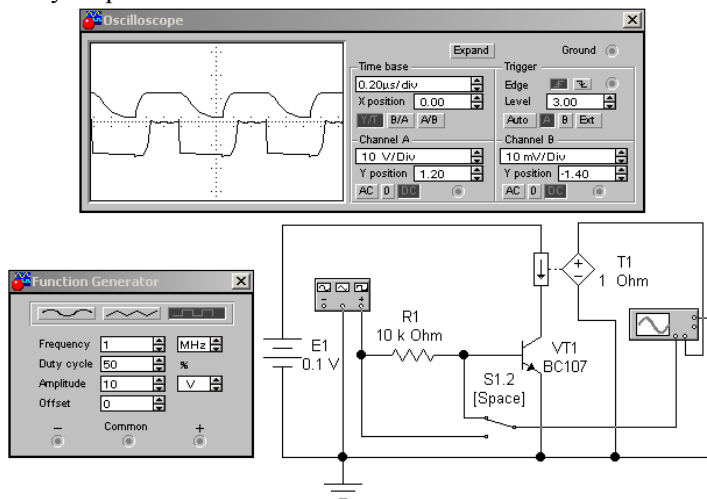


Рис. 8.48

На генераторі в колі бази встановити режим генерування прямокутних імпульсів напруги з амплітудою 10 В і частотою 1 МГц. Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа осцилограми напруг на виході генератора, на базі транзистора і струму колектора. Повторити виміри при частоті 1 кГц. Пояснити процеси в транзисторі в імпульсному режимі. При зніманні осцилограм бажано застосовувати розгорнуте зображення осцилографа.

8.8.3. Характеристики і параметри польових транзисторів

Метою комп'ютерного моделювання є вивчення:

- методики вимірювання характеристик і параметрів польових транзисторів;

- статичних вхідних і вихідних характеристик польових транзисторів;
- роботи польових транзисторів в імпульсному режимі.

1. Дослідити характеристики прямої передачі польових транзисторів, склавши схему, зображену на рис. 8.49. Вивчити методику спостереження характеристик польових транзисторів за допомогою осцилографа. Перемикачем S2 до кола затвора транзистора потрібно підімкнути генератор лінійно змінної у часі (пилкоподібної) напруги з амплітудою 3 В, частотою 100 Гц і напругою зміщення (offset) 3 В. На вхід каналу В через перемикач S3 подати напругу на затворі, а на вхід каналу А — напругу, пропорційну струму стоку, від перетворювача струм — напруга Т1. Якщо перемикнути генератор розгортки осцилографа у режим А/В, на екрані спостерігатиметься характеристика прямої передачі польового транзистора. Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа характеристику прямої передачі транзистора, користуючись масштабом по осях на екрані. Виміри виконати за таких значень напруги на стоці: 10, 20, 30 В, яка подається від джерела Е1.

Зняти характеристику прямої передачі польового транзистора за допомогою вольтметра і амперметра. Перемикачем S1 підімкнути джерело постійної напруги Е1 послідовно з амперметром. Перемикачем S2 до кола затвора підімкнути джерело постійної напруги Е2. Перемикачем S3 підімкнути вольтметр паралельно переходу затвор-виток. Змінюючи напругу на затворі, слід вимірювати та записувати показання вольтметра і значення сили струму колектора. Напругу на затворі змінювати через 0,5 В від 0 до –3 В. Виміри виконати за таких значень напруги на стоці: 10, 20, 30 В, яка подається від джерела Е1. Побудувати за результатами вимірювань графіки характеристик прямої передачі транзистора для різних напруг на стоці.

Визначити крутість характеристики польового транзистора за формулою

$$S = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{ЗВ}}, \quad (8.30)$$

де $\Delta I_C, \Delta U_{ЗВ}$ — прирости струму стоку і напруги затвор-виток на вхідній характеристиці польового транзистора.

2. Дослідити вихідні характеристики польового транзистора. Для цього у схемі, зображений на рис. 8.49, перемикачем S1 до стоку транзистора підімкнути генератор лінійно змінної у часі (пилкоподібної) напруги з амплітудою 5 В, частотою 100 Гц і напругою зміщення (offset) 4,7 В. Перемикачем S2 увімкнути у коло затвора джерело постійної напруги E2. Перемикачем S3 до стоку підключити вхід В осцилографа. У цій схемі на вхід каналу А подається напруга, пропорційна струму стоку від перетворювача струм-напруга T1, як показано на рис. 9.50. Якщо перемикнути генератор розгортки осцилографа в режим A/B, на екрані спостерігатиметься вихідна характеристика польового транзистора. Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа вихідну характеристику транзистора, користуючись масштабом по осях на екрані за таких значень напруги на затворі: 0, -1, -2, -3 В, яка подається від джерела напруги E2.

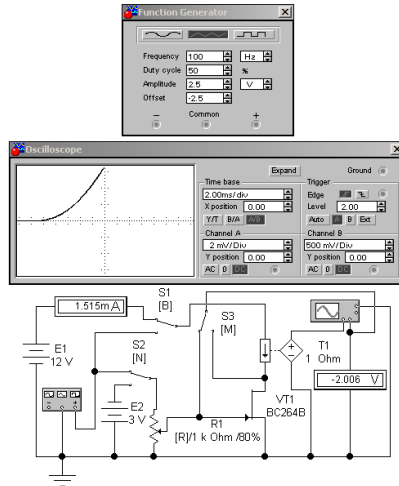


Рис. 8.49

Зняти вихідні характеристики польового транзистора за допомогою вольтметра і амперметра. Перемикачем S1 у схемі, зображений на рис. 8.50, до стоку підім-

кнути джерело постійної напруги E1 послідовно з амперметром, який вимірює струм стоку. До стоку перемикачем S3 підімкнути вольтметр, який вимірює напругу стік-виток. Установити джерелом E2 напругу зміщення затвора -1 В. Змінюючи напругу джерела E1 від 0 до 2 В через $0,5$ В, потім від 2 до 10 В через 2 В, вимірювати напругу стік-виток і струм стоку. Повторити виміри при напрузі на затворі -2 і -3 В. За результатами вимірювань побудувати вихідні характеристики польового транзистора. Визначити вихідну провідність польового транзистора за формулою

$$g_{22} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CB}}, \quad (8.31)$$

де $\Delta I_C, \Delta U_{CB}$ — прирости струму стоку і напруги «стік-виток» за умови $U_{3B} = -1$ В.

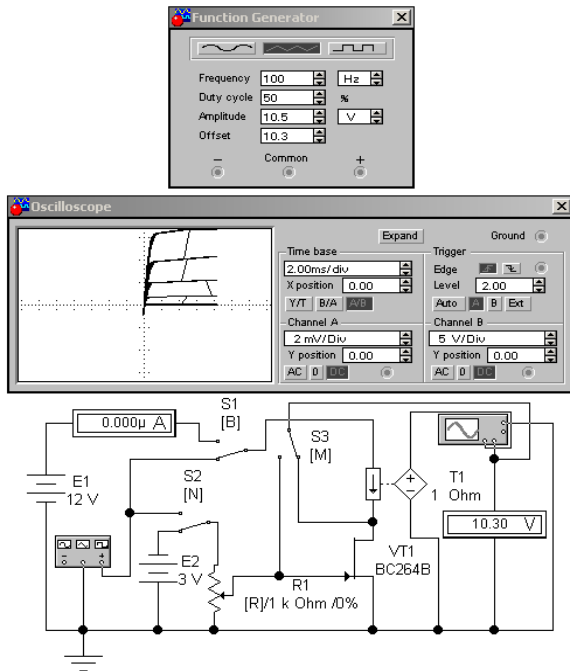


Рис. 8.50

3. Виміряти диференціальні параметри польового транзистора, склавши схему, зображену на рис. 8.51, в якій до кола стоку ввімкнено послідовно джерела постійної напруги E1 і змінної напруги E2, а також амперметри постійного струму A1 і змінного струму A2. У колі затвора ввімкнено послідовно джерела постійної E3 та змінної E4 напруги і паралельно затвору — вольтметри постійної напруги V1 і змінної напруги V2. Вольтметри постійної напруги V1 і змінної напруги V2 перемикачем S1 можна підімкнути до стоку або до затвора. Вхід В осцилографа перемикається разом із вольтметрами перемикачем S1. Це дає змогу спостерігати осцилограми змінних складових відповідних напруг. Зауважимо, що входи осцилографів потрібно перемикнути у режим АС спостереження змінних складових напруг. На вхід осцилографа А подається напруга, пропорційна струму стоку від перетворювача T1, що дає змогу контролювати форму струму, яка має бути гармонічною.

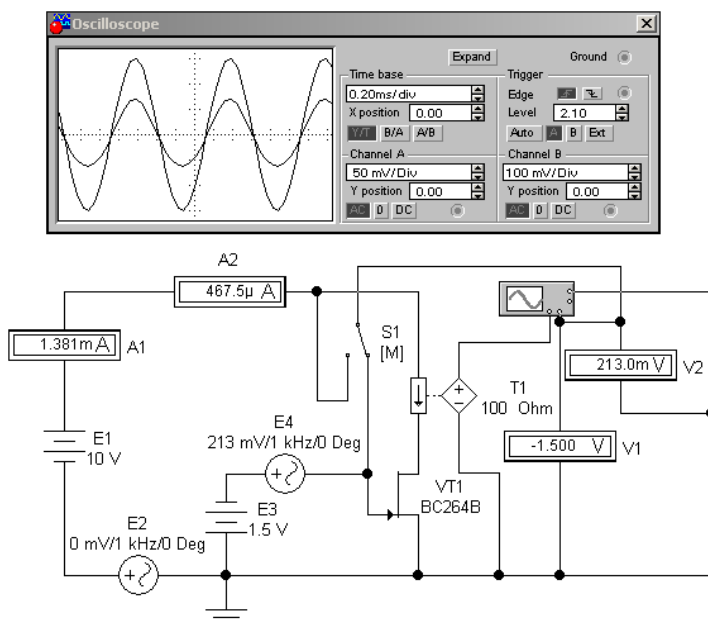


Рис. 8.51

Для вимірювання крутості потрібно виміряти змінні складові струму стоку і напруги на затворі при змінній складовій напруги на стоці E2, що дорів-

нує нулю (умова $u_{CB} = \text{const}$), і підставити заміряні величини у формулу (8.30).

Для вимірювання вихідної провідності потрібно встановити змінну напругу джерела E4, що дорівнює нулю (умова $u_{3B} = \text{const}$). Подати на стік суму постійної і змінної складових напруг від джерел E1 і E2 і виміряти змінні складові струму стоку і напруги на стоці. Розрахувати вихідну провідність за формулою (8.31).

Дослідити залежність крутості і вихідної провідності від положення робочої точки на характеристиках транзистора. Для цього виконати виміри параметрів для кількох величин напруги джерела E1: 6, 12, 18 В і різних постійних складових напруги на затворі, яка задається джерелом E3: -1, -2, -3 В.

4. Дослідити польовий транзистор в імпульсному режимі, склавши схему, показану на рис. 8.52.

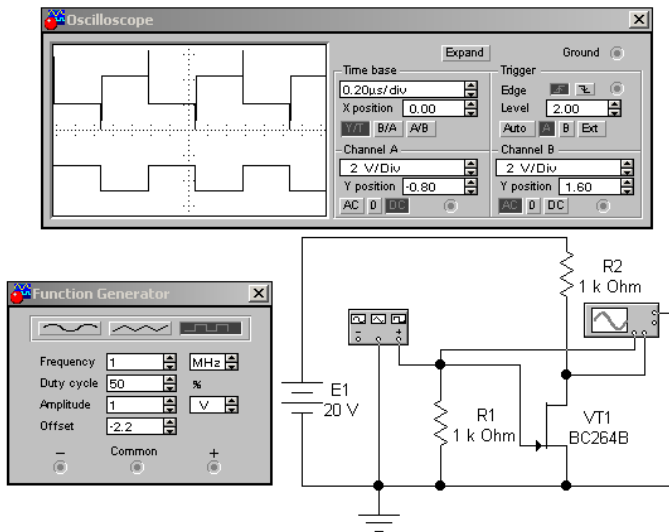


Рис. 8.52

На генераторі в колі затвора встановити режим генерування напруги у вигляді прямокутних імпульсів з амплітудою 1 В і частотою 1 МГц при зміщенні -2 В. Спостерігати і зарисувати з екрана осцилографа осцилограми

напруг на затворі транзистора і на стоці. Пояснити процеси у транзисторі в імпульсному режимі.

8.8.4. Електричні кола в режимі постійних струмів

Метою комп'ютерного моделювання є:

- освоєння методики вимірювань статичних режимів радіоелектронних кіл;
- перевірка методів розрахунків радіоелектронних кіл у режимі постійних струмів;
- дослідження радіоелектронних кіл у режимі постійних струмів.

1. Розрахувати струми і напруги у статичному режимі у схемі підсилювача на біполярному транзисторі (рис. 8.53) за спрощеною методикою [див. формули (8.14)]. Заміряти струми і напруги у схемі, зображений на рис. 8.53, і порівняти розраховані і виміряні величини струмів і напруг.

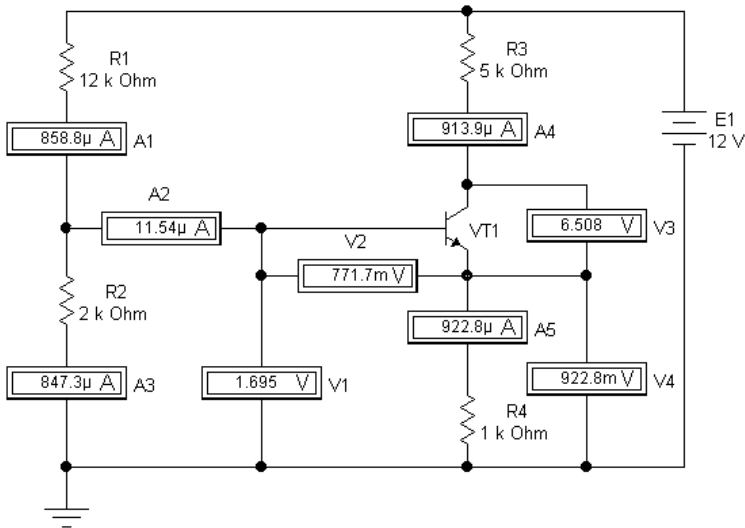


Рис. 8.53

2. Дослідити, як змінюється статичний режим у схемі, зображений на рис. 9.53, при зміні величин опорів R2, R3, R4.

3. Розрахувати опори резисторів у схемі, зображеній на рис. 8.53, так, щоб забезпечити статичний режим, який характеризується величинами $i_{K0} = 2 \text{ mA}$, $u_{KE0} = 5 \text{ V}$, при заданій напрузі $E_K = 12 \text{ V}$ джерела E1, якщо параметр $\beta = 100$ (див. прикл. 8.9).

4. Розрахувати струми і напруги у статичному режимі у схемі підсилювача на польовому транзисторі (рис. 8.54) за методикою, розглянутою в прикладі 8.6. При розрахунках використати характеристики польового транзистора, отримані в п. 8.5.3. Заміряти струми і напруги та порівняти розраховані і виміряні величини струмів і напруг.

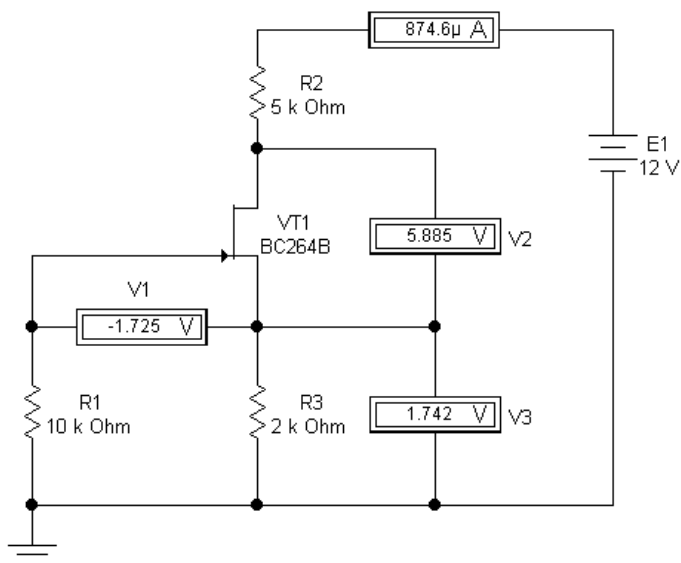


Рис. 8.54

5. Дослідити, як змінюється статичний режим у схемі, зображеній на рис. 9.54, при зміні величин опорів R2, R3.

6. Розрахувати опори резисторів у схемі, показаній на рис. 8.54, так, щоб забезпечити статичний режим, який характеризується величинами $i_{C0} = 2 \text{ mA}$, $u_{CB0} = 5 \text{ V}$, при заданій напрузі $E_K = 12 \text{ V}$ джерела E1 (див. приклад 8.11).

7. Розрахувати струми і напруги у схемі, показаній на рис. 8.55, за методикою, розглянутою в прикладі 8.8. Величини опорів задані на схемі, напруга джерела E_1 дорівнює $E_k = 12$ В, параметр $\beta = 100$.

Виміряти струми і напруги у схемі, показаній на рис. 8.55, і порівняти їх із розрахованими величинами. Для вимірювання струмів застосувати амперметри так, як показано на рис. 8.55. Для вимірювання напруг можна застосувати опцію DC Operation Point (розрахунок схем у режимі постійних струмів) із меню Analysis. Під час виконання цієї операції відкривається вікно (рис. 8.56), в якому наводиться таблиця, лівий стовпчик якої — номер вузла, а правий — потенціали цих вузлів відносно базисного вузла. Для того щоб пронумерувати вузли схеми, потрібно відкрити меню Circuit, вибрати Schematic Options і на закладці Show / Hide вибрати Show nodes.

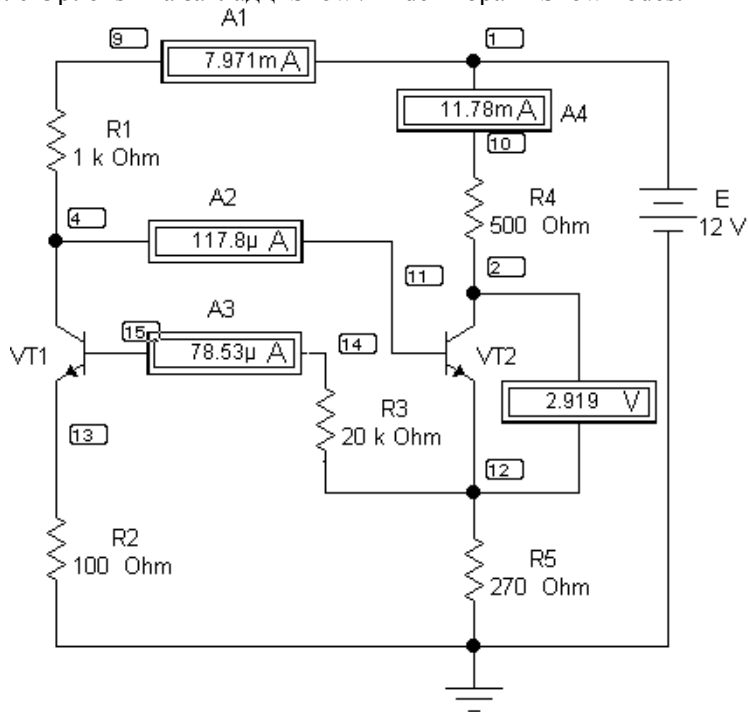


Рис. 8.55

Node/Branch	Voltage/Current
1	12.00000
2	6.10986
4	4.02926
9	11.99999
10	11.99999
11	4.02926
12	3.19127
13	793.14869m
14	1.62068
15	1.62068
V1#branch	-19.75099m

Рис. 8.56

8.8.5. Електричні кола у малосигнальному режимі

Метою комп'ютерного моделювання є:

- освоєння методики вимірювань малосигнальних параметрів транзисторів;
- дослідження співвідношень між малосигнальними параметрами транзисторів;
- дослідження теоретичних моделей транзисторів у малосигнальному режимі.

1. Виміряти y -параметри біполярного транзистора у схемі зі спільним емітером (рис. 9.57). Ці параметри входять до рівнянь

$$\Delta i_{\text{Б}} = y_{11\text{E}} \Delta u_{\text{БЕ}} + y_{12\text{E}} \Delta u_{\text{КЕ}}, \quad \Delta i_{\text{К}} = y_{21\text{E}} \Delta u_{\text{БЕ}} + y_{22\text{E}} \Delta u_{\text{КЕ}}. \quad (8.32)$$

Отже, для вимірювання параметрів $y_{11\text{E}}$ і $y_{21\text{E}}$ потрібно за умови $\Delta u_{\text{КЕ}} = 0$ (постійна напруга на колекторі) виміряти прирости струмів бази і колектора при прирості напруги на базі $\Delta u_{\text{БЕ}}$. Тоді з рівнянь (8.32) отримаємо розрахункові формули

$$y_{11\text{E}} = \frac{\Delta i_{\text{Б}}}{\Delta u_{\text{БЕ}}}, \quad y_{21\text{E}} = \frac{\Delta i_{\text{К}}}{\Delta u_{\text{БЕ}}}. \quad (8.33)$$

Аналогічно можна вивести формули

$$y_{12E} = \frac{\Delta i_B}{\Delta u_{KE}}, \quad y_{22E} = \frac{\Delta i_K}{\Delta u_{KE}} \quad (8.34)$$

за умови $\Delta u_{BE} = 0$ (постійна напруга на базі).

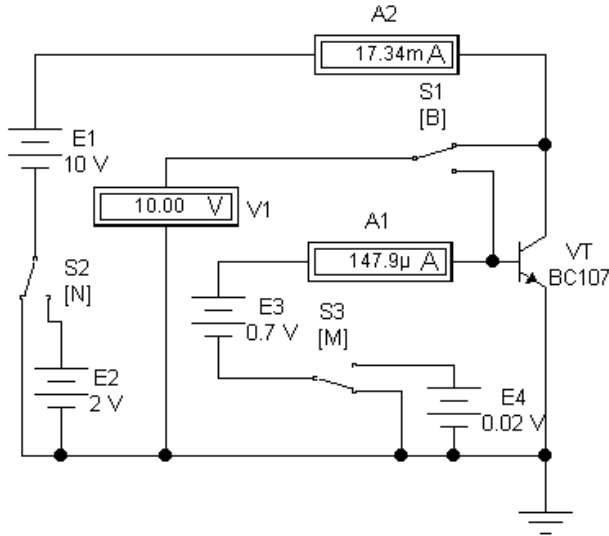


Рис. 8.57

У схемі, зображеній на рис. 8.57, у кола колектора увімкнені джерела напруги E1 і E2, перемикач S2 і амперметр постійного струму A2. На джерелі E1 встановлена постійна напруга колектора, а на джерелі E2 — напруга, що дорівнює приросту колекторної напруги. Перемикачем S2 можна підімкнути джерело E2 послідовно із джерелом E1, тим самим змінюючи напругу колектора на величину заданого приросту. Аналогічно побудовано і коло бази. Для вимірювання напруги слугує вольтметр, що може підключатися до колектора або бази перемикачем S1.

Для визначення параметрів за формулами (8.33) потрібно відімкнути джерела E2 і E4 перемикачами S2 і S3 і виміряти струми бази і колектора. Потім підключити джерело E4, надавши приріст напрузі бази, і знову виміряти струми бази і колектора. За результатами цих вимірів визначити прирости струмів бази і колектора, підставивши які у формули (8.33), розрахувати параметри y_{11E} і y_{21E} .

Для визначення параметрів за формулами (8.34) до бази слід підімкнути постійну напругу джерела E3 і до колектора – джерело E1. Заміряти струми бази і колектора. Потім підімкнути джерело E2, надавши напрузі колектора приріст, і знову заміряти струми транзистора. За цими вимірами визначити прирости струмів і розрахувати параметри y_{12E} , y_{22E} .

2. Виміряти y -параметри біполярного транзистора у схемі зі спільною базою (рис. 9.58), які входять до рівнянь

$$\begin{aligned}\Delta i_E &= y_{11B} \Delta u_{EB} + y_{12B} \Delta u_{KB}, \\ \Delta i_K &= y_{21B} \Delta u_{EB} + y_{22B} \Delta u_{KB}\end{aligned}\quad (8.35)$$

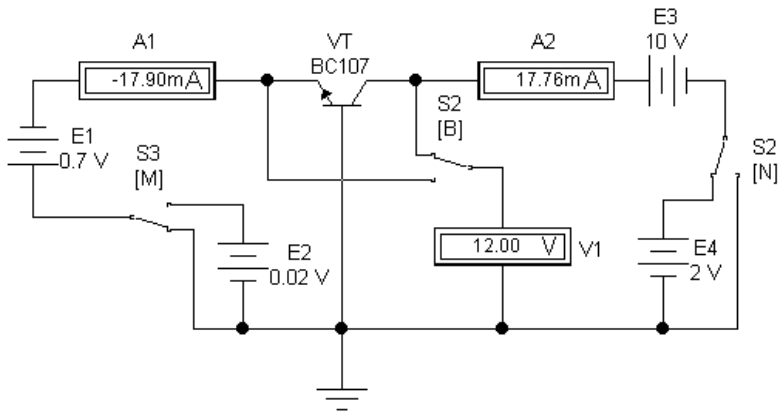


Рис. 8.58

Для вимірювання параметрів y_{11B} і y_{21B} потрібно за умови $\Delta u_{KB} = 0$ (постійна напруга на колекторі) виміряти прирости струмів емітера і колектора при прирості напруги на базі Δu_{EB} . Тоді з рівнянь (8.35) отримаємо розрахункові формули

$$y_{11B} = \frac{\Delta i_E}{\Delta u_{EB}}, \quad y_{21B} = \frac{\Delta i_K}{\Delta u_{EB}}. \quad (8.36)$$

Аналогічно можна вивести формули

$$y_{12E} = \frac{\Delta i_B}{\Delta u_{KE}}, \quad y_{22E} = \frac{\Delta i_K}{\Delta u_{KE}} \quad (8.37)$$

за умови $\Delta u_{BE} = 0$ (постійна напруга на базі).

Схема, зображена на рис. 8.58, побудована аналогічно до схеми, показаної на рис. 8.57. Джерела E1, E2 задають напругу і приріст напруги в колі емітера, а E3 і E4 — у колі колектора. Вольтметр через перемикач S2 може вимірювати напругу на емітері або колекторі. Виміри і розрахунки виконуються так само, як і в п. 1.

3. За результатами вимірів, отриманих в п. 1 і 2, перевірити співвідношення між y -параметрами схем зі спільним емітером і спільним колектором:

$$y_{11E} = y_{11B} + y_{12B} + y_{21B} + y_{22B}, \quad y_{12E} = -(y_{12B} + y_{22B}), \\ y_{21E} = -(y_{21B} + y_{22B}), \quad y_{22E} = y_{22B},$$

що випливають із рівнянь (8.18).

4. Скласти і дослідити малосигнальну схему заміщення біполярного транзистора (див. рис. 8.59), що містить кероване джерело струму Т з коефіцієнтом передачі струму β , опори бази R_b , колектора R_k , емітера R_e . Розрахувати параметри схеми заміщення транзистора, h -параметри якого виміряні у п. 3 розділу 8.5.2. Для цього скористатися формулами (8.25). Виміряти h -параметри схеми заміщення транзистора. При вимірюванні параметрів h_{11} і h_{21} потрібно заміряти напругу база-емітер u_{BE} і струм колектора i_K за умови, що напруга колектор-емітер джерела E1 $u_{KE} = 0$. За результатами вимірів розрахувати параметри h_{11} і h_{21} за формулами

$$h_{11} = \frac{u_{BE}}{i_B}, \quad h_{21} = \frac{i_K}{i_B}.$$

Для вимірюванні параметрів h_{12} і h_{22} потрібно заміряти напругу база-емітер u_{BE} і струм колектора i_K за умови, що струм бази $i_B = 0$. Розрахувати ці параметри за формулами

$$h_{12} = \frac{u_{BE}}{u_{KE}}, \quad h_{22} = \frac{i_K}{u_{KE}}.$$

Порівняти h -параметри схеми зміщення з h -параметрами транзистора.

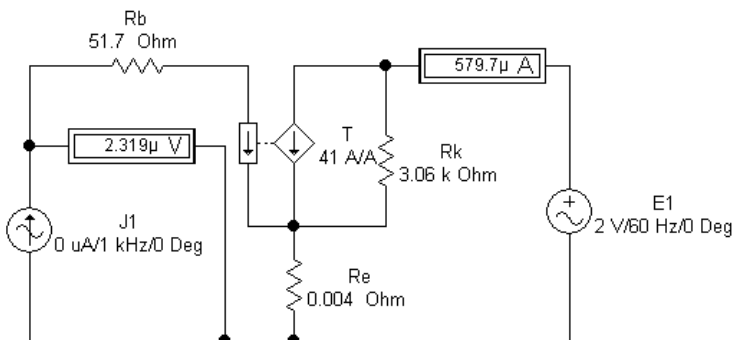


Рис. 8.59

8.8.6. Перетворення форми і спектра сигналів у нелінійних колах

Метою комп'ютерного моделювання є:

- освоєння методики спектрального аналізу коливань у нелінійних колах методами кратних дуг, трьох ординат, кута відсікання;
- дослідження спектрів коливань у нелінійних колах при моно- і бігармонічній діях.

1. Експериментально перевірити придатність методу кратних дуг до розрахунків спектрів коливань у нелінійних колах. Обнулити джерело змінної напруги E1 у схемі, показаній на рис. 8.60, і виміряти струм діода при значеннях напруги на діоді 0,55, 0,6, 0,65 В. За цими даними розрахувати коефіцієнти апроксимуючого полінома другого степеня, (див. прикл. 8.2). Розрахувати за методом кратних дуг постійну складову і амплітуди перших двох гармонік струму діода при подачі на діод постійної напруги 0,6 В і змінної напруги з амплітудою 0,05 В, як зроблено у прикладі 8.18.

Перевірити результати розрахунків експериментально. Для цього у схемі, зображеній на рис. 8.60, встановити постійну напругу джерела E2 і діючу напругу джерела E1, що відповідає амплітуді змінної напруги 50 мВ. Спостерігати зміну форми коливань струму при дії гармонічної напруги. Виміряти спектр струму за методикою, викладеною в п. 1 розділу 8.5.1 (див. рис. 8.61).

Порівняти розрахунковий і вимірний спектри.

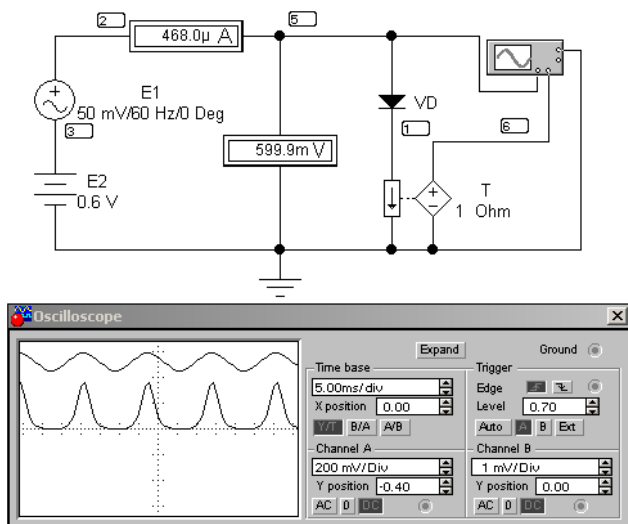


Рис. 8.60

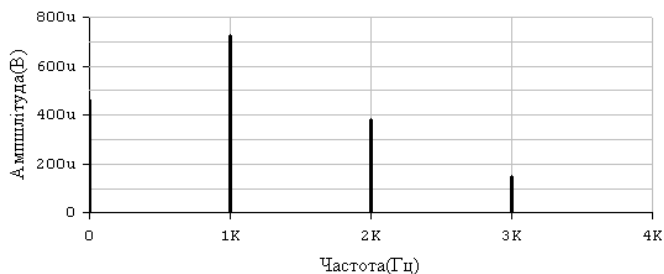


Рис. 8.61

2. Розрахувати спектр струму діода методом трьох ординат, скориставшись результатами виміру у п. 1 струмів діода для трьох значень напруги, як це зроблено у прикладі 9.20. Порівняти результати розрахунків із виміряним спектром у п. 1.

3. Дослідити спектр коливань у нелінійному колі при бігармонічній дії. Для цього у схемі, показаній на рис. 8.62, на діод подати суму напруг: постійну джерела E3, змінну джерела E1 із частотою 1 000 Гц та діючою величиною 50 мВ і джерела E2 із частотою 100 Гц і діючою величиною 10 мВ.

Спостерігати осцилограми суми напруг і струму діода. Виміряти спектр струму, як у п.1 (див. рис. 8.63).

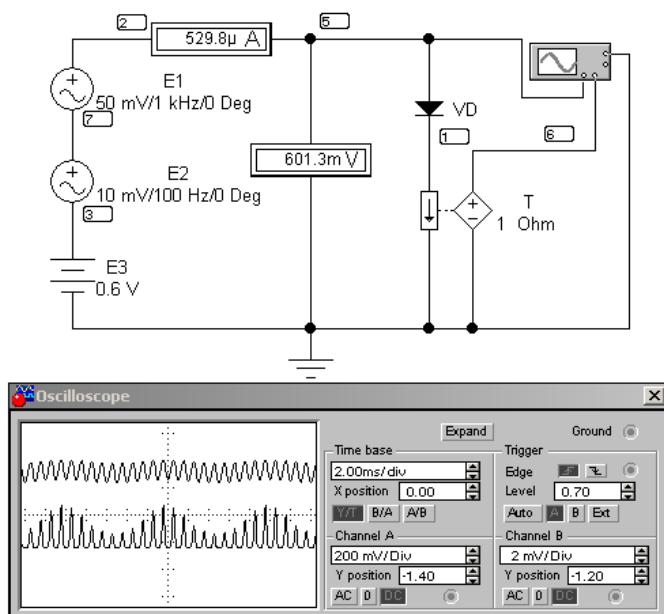


Рис. 8.62

Розрахувати спектр струму, скориставшись апроксимацією ВАХ діода, визначеною у п. 1, і методикою, застосованою у прикладі 8.19. Порівняти розрахований спектр із вимірним.

Розрахувати комбінаційні частоти складових спектра за формулою (8.27) і показати ці частоти на рис. 8.63.

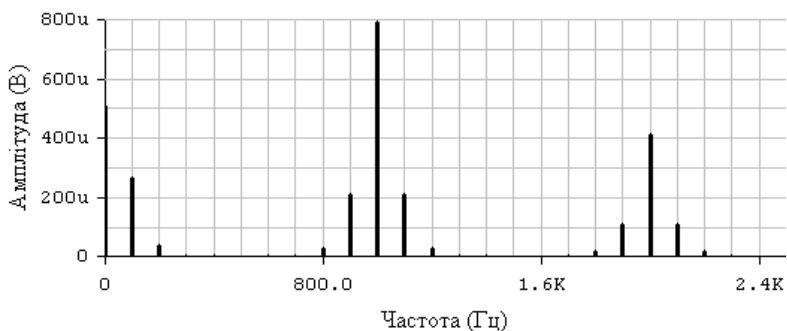


Рис. 8.63

- Що таке комбінаційні частоти і коли вони утворюються?

8.8.7. Квазілінійний метод. Середні параметри

Метою комп'ютерного моделювання є:

- вивчення методики вимірювання середніх параметрів інерційних нелінійних кіл;
- дослідження залежності середніх параметрів від величини амплітуди вхідної напруги і від положення початкової робочої точки на характеристиках нелінійного елемента.

1. Скласти схему для вимірювання середнього коефіцієнта передачі напруги резонансного підсилювача на польовому транзисторі (див. рис. 8.28), в якому нелінійним елементом є польовий транзистор VT, а лінійним — частотно вибіркоче коло — резонансний контур, утворений елементами R, L, C, який виділяє першу гармоніку струму стоку. Середнім коефіцієнтом передачі напруги є відношення вихідної напруги, що знімається з резонансного контура, до вхідної гармонічної напруги. Для його вимірювання потрібно настроїти резонансний контур на частоту генератора 160 кГц змінною ємністю C за показаннями вольтметра V3, який разом із вольтметром V1 має бути в режимі вимірювання змінної напруги АС. Ознакою резонансу є максимальна напруга на контурі.

За допомогою перемикача S1 підімкнути до затвора транзистора послідовно джерело постійної напруги зміщення E3 і джерело змінної напруги E1, напругу якого можна регулювати потенціометром R1.

Встановити постійну напругу зміщення $-1,5$ В і зняти залежність середнього коефіцієнта передачі напруги від амплітуди вхідної змінної напруги. Для цього потрібно змінювати вхідну напругу потенціометром R1 і вимірювати вхідну і вихідну напруги вольтметрами V1 і V3. Останній підімкнути до контура перемикачем S2. Повторити виміри при напрузі зміщення -2 В і -1 В. При вимірах спостерігати форму осцилограм напруги на контурі і струму транзистора. Для цього подати напругу з контура на вхід А осцилографа, а на вхід В — напругу з перетворювача струм-напруга Т, ввімкненого в коло витоку, пропорційну струму транзистора. Переконатися, що за спотвореної форми струму напруга на контурі має синусоїдальну форму, тобто контур виділяє першу гармоніку струму. Зробити висновки щодо залежності середнього коефіцієнта передачі напруги від величини амплітуди вхідної напруги і від положення початкової робочої точки на характеристиці прямої передачі польового транзистора. При цьому скористатися характеристиками польового транзистора, отриманими в підрозділі 8.4.5.3, п. 1.

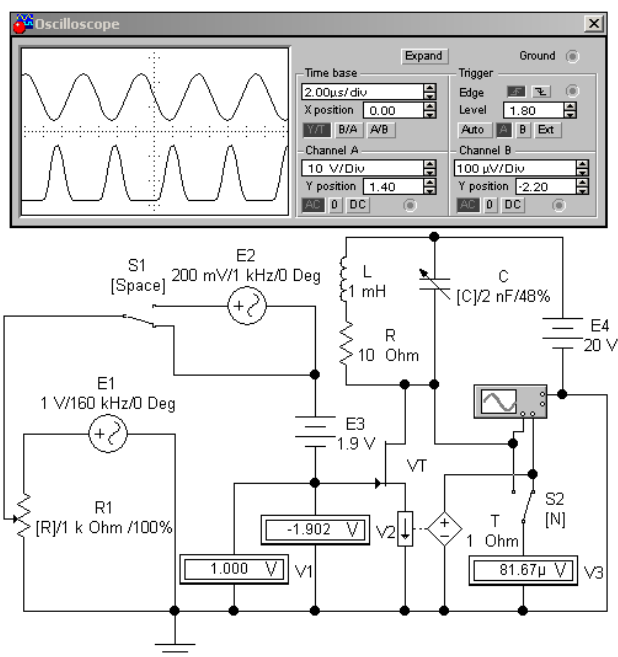


Рис. 8.28

8.8.8. Параметричні кола

Метою комп'ютерного моделювання є:

- вивчення методики вимірювання параметрів параметричних кіл;
- дослідження процесів у параметричних колах.

1. Дослідити залежність передавальної провідності (крутості) польового транзистора від напруги зміщення на затворі. Для цього потрібно у схемі, зображеній на рис. 8.28, до затвора послідовно підімкнути джерела змінної напруги E1 і постійної напруги E3 перемикачем S1. Встановити напругу джерела E1 100 мВ. Вольтметр V3 перемкнути перемикачем S2 до виходу перетворювача Т, який має передаточний опір 1 Ом, так що струму в 1 мА відповідає вихідна напруга 1 мВ. Змінюючи напругу джерела E3 в межах від 0,1 до 1,8 В, вимірювати напругу вольтметром S3 і перераховувати її у величину струму. Визначати передаточну провідність транзистора як відношення струму транзистора до величини змінної напруги на затворі, що дорівнює 100 мВ. Побудувати графік залежності передаточної провідності від керуючої напруги джерела E3.

2. Дослідити параметричне коло при бігармонічній дії. Для цього у схемі, показаній на рис. 8.28, підімкнути перемикачем S1 послідовно із джерелами E1 та E3 джерело змінної напруги E2, на якому встановити напругу 200 мВ і частоту 1 кГц. Спостерігати на осцилографі осцилограми напруги на контурі і струму транзистора — верхня і нижня осцилограми відповідно (рис. 8.29). Пояснити процеси в досліджуваній схемі.

3. Дослідити спектр вихідної напруги на контурі. Для цього в меню Analysis потрібно вибрати опцію Fourier. У діалоговому вікні (див. рис. 10.30) встановити номер вихідного вузла Output node (для визначення номера вихідного вузла слід у меню Circuit вибрати опцію Schematic Options і на сторінці Show/Hide встановити прапорець Show nodes), основну частоту Fundamental frequency 1 кГц, кількість гармонік Number of harmonics 170 і вибрати команду Simulate, після чого буде отримана спектральна діаграма (див. рис. 8.31). Пояснити отриманий спектр за допомогою формули (8.22).

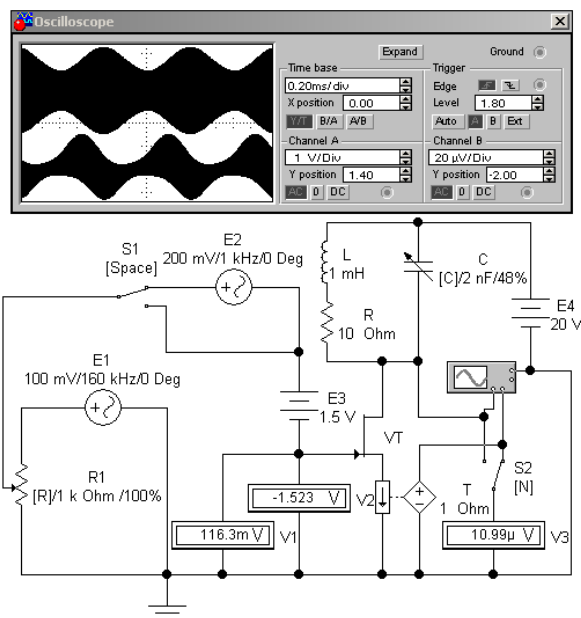


Рис. 8.29

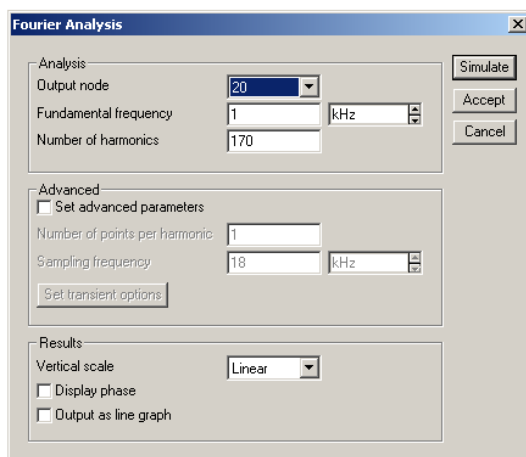


Рис. 8.30

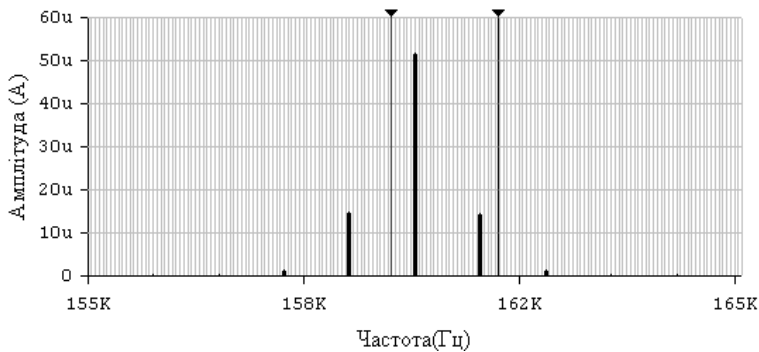


Рис. 8.31

8.9. Підсумки і самоконтроль

Лише в нелінійних колах можлива реалізація найважливіших процесів обробки сигналів: модуляції, детектування, перетворення частоти тощо. Тому вивчення процесів у нелінійних колах є необхідним для розуміння роботи більшості радіоелектронних пристроїв. У цьому розділі вивчаються неінерційні нелінійні кола, які містять як дво-, так і багатополосні нелінійні елементи. Розглянуто режими постійних струмів, малого і великого сигналів; методи гармонічного аналізу коливань у нелінійних колах; особливості перетворення форми і спектра сигналів у нелінійних колах. Введено низку нових важливих понять — таких, як статичні і диференціальні параметри, від'ємний опір, статичний і динамічний режими роботи електронних кіл, малосигнальні параметри електронних приладів, комбінаційні частоти. Теорію нелінійних неінерційних кіл також розглянуто у літературі [1, 11.1, 11.2], [3, гл. 11, 12], [4, гл. 12], [7, гл. 1, 2], [9, гл. 5], [11, гл. 4–7, 9], [12, гл. 9].

Закріпити та проконтролювати одержані знання під час вивчення даного розділу допоможуть наведені далі контрольні завдання і запитання:

- Що таке статичні і диференціальні параметри? В яких режимах вони використовуються?
- Які режими називаються малосигнальними?
- Як розуміти поняття «від'ємний опір»?
- Як складається повна система рівнянь нелінійного кола і чим вона відрізняється від такої для лінійного кола?
- Як графічно розв'язуються рівняння нелінійного кола? Як будується навантажувальна пряма?

- Що являє собою задача апроксимації характеристик? Назвіть найбільш вживані апроксимуючі функції. Як визначаються їх коефіцієнти?
- Якими рівняннями описуються нелінійні багатополосні елементи? Що являють собою сім'ї характеристик?
- Які характеристики мають біполярні і польові транзистори?
- Як визначаються малосигнальні параметри багатополосних елементів, наприклад транзисторів?
- Як аналізуються електронні схеми у статичному режимі?
- Якими параметрами і рівняннями описуються лінійні багатополосники?
- Як перерахувати параметри однієї зі схем ввімкнення у параметри іншої?
- Як складаються схеми для малосигнального режиму?
- Як складаються рівняння схем із багатополосними елементами?
- Чим пояснюється і чим відрізняється перетворення форми і спектра сигналу в лінійних і нелінійних колах?
- Як виконується гармонічний аналіз методами кратних дуг, кута відсікання, трьох–п'яти ординат?

Нелінійні і параметричні кола є найбагатшими за своїми можливостями щодо технічного застосування, але й найскладнішими з погляду математичного моделювання. Вивчення цього розділу дає змогу зрозуміти умови стійкості електромагнітних кіл, процеси генерування електричних коливань, перетворення форми і спектра сигналів у нелінійних і параметричних колах, а також підсилення сигналів. Введено такі нові важливі поняття, як стійкість електромагнітного кола, умови стійкості, квазілінійне коло, середні параметри квазілінійного кола, автогенератор, процес самозбудження. Розглянуто методи аналізу нелінійних інерційних кіл: квазілінійний метод, метод повільно змінних амплітуд. Для вивчення нелінійних і параметричних кіл можна рекомендувати також літературу [1, гл. 12], [3, гл. 11, 16, 17], [7, гл. 4–8], [12, гл. 10].

Для самоконтролю знань пропонуємо дати відповіді на такі запитання:

- Який вигляд мають вольт-кулонна і вебер-амперна характеристики в лінійних і нелінійних конденсаторів та котушок індуктивності?
- Чим відрізняються елементні рівняння лінійних і нелінійних ємності й індуктивності? Виведіть ці рівняння.
- Як визначається енергія втрат у феромагнітному осерді?
- Якими схемами моделюються нелінійні котушки і конденсатори?
- Як складаються рівняння нелінійних інерційних кіл?

- У якому режимі нелінійні компоненти можна розглядати як електрично керовані параметричні елементи?
- Що таке стійкість електромагнітного кола?
- Якими рівняннями описуються нелінійні інерційні кола у стані рівноваги?
- Сформулюйте необхідну і достатню умову стійкості.
- Які кола називаються квазілінійними?
- Що таке середні параметри?
- У чому полягає метод повільно змінних амплітуд?
- Поясніть процес самозбудження. Що таке автогенератор?
- Які елементні рівняння мають параметричні елементи?
- Як змінюється спектр сигналу в параметричному колі?
- Порівняйте властивості параметричних кіл із лінійними і нелінійними.
- Які процеси обробки сигналів можливі в колах лінійних і нелінійних, інерційних і неінерційних, у параметричних колах і в колах із розподіленими параметрами?

ДОДАТКИ

ПРОГРАМА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ І РАДІОЕЛЕКТРОННИХ КІЛ *ELECTRONICS WORKBENCH*

Д.1. Загальна характеристика

Програма Electronics Workbench надає можливість моделювати аналогові, цифрові та цифро-аналогові схеми великої складності. У програмі є бібліотеки, які містять великий набір електричних і радіоелектронних компонентів. Параметри компонентів можна змінювати в широких межах. Програма містить значний набір вимірювальних приладів, що мають наближений до реальних приладів вигляд.

Програма має значні переваги, а саме: суттєву економію часу при підготовці експерименту порівняно з реальною лабораторією; зручність виконання вимірювань завдяки широкому вибору вимірювальних віртуальних приладів; гарантію від пошкодження приладів у разі їх неправильного ввімкнення; широкі графічні можливості; використання стандартного інтерфейсу Windows, інтуїтивність і простота якого робить програму доступною будь-кому, хто знайомий з основами застосування Windows.

Electronics Workbench дає змогу будувати схеми за допомогою таких операцій:

- вибір елементів і приладів із бібліотек;
- переміщення елементів та схем у будь-яке місце робочого столу;
- обертання елементів і груп елементів на кути, кратні 90 градусам;
- копіювання, вставка, видалення елементів і груп елементів, фрагментів схем і цілих схем;
- зміна кольору провідників з метою виділення окремих кіл протікання струмів;
- виділення кольором контурів схем для більш зручного сприймання;
- одночасне підключення кількох вимірювальних приладів і спостереження їх показань на моніторі;
- присвоєння елементам умовних позначень;

- зміна параметрів елементів у широких межах;
- зміна шкал приладів залежно від діапазону вимірювань;
- вибір режимів роботи приладів;
- задавання виду вхідних сигналів.

Усі ці операції виконуються за допомогою миші та клавіатури. Графічні можливості програми дають можливість одночасно спостерігати кілька графіків, відображати криві на графіках різними кольорами, вимірювати координати точок на графіках.

Д.2. Моделювання схем

Д.2.1. Вибір компонентів із бібліотек і робота з ними

Потрібний компонент добирається з бібліотеки компонентів. Для цього слід відкрити відповідне поле компонентів шляхом натискання лівої кнопки миші на піктограмі поля. Дібраний компонент переміщується на робоче поле за допомогою миші. При доборі елемента потрібно встановити покажчик миші на елементі (при цьому він змінює своє зображення на вигляд руки) і натиснути ліву кнопку. Дібраний елемент змінює колір з чорного на червоний. Для вибору групи елементів потрібно, натиснувши ліву кнопку миші, розтягнути рамку навколо частини схеми, що виділяється. Виділення знімається натисканням лівої кнопки миші у будь-якому місці робочого поля. Виділені елементи переміщуються на робочому полі мишею або стрілками на клавіатурі. Виділені об'єкти можна обертати. Для цього треба вибрати команду Rotate з меню Circuit, або натиснути Ctrl + R, або скористатися відповідним значком на панелі інструментів. При цьому кожен із виділених елементів повернеться на кут 90° за годинниковою стрілкою. Виділені об'єкти можна копіювати командою Ctrl + C і вставляти командою Ctrl + V.

Д. 2.2. З'єднання елементів у схемі

Для з'єднання елементів потрібно підвести покажчик миші у вигляді стрілки до виводу одного з елементів. При цьому на виводі з'явиться чорна точка. Натиснувши ліву кнопку миші, потрібно протягнути лінію до виводу другого елемента, на якому також з'явиться чорна точка. Тоді треба відпустити кнопку миші, і елементи з'єднуються провідником. Провідники, що з'єднують елементи, можна переміщувати мишею з метою їх кращого розташування на схемі. Щоб змінити колір провідника, потрібно встановити курсор миші на провіднику і

двічі натиснути ліву кнопку миші. У діалоговому вікні, що відкриється (рис. Д.2.1), потрібно вибрати бажаний колір.

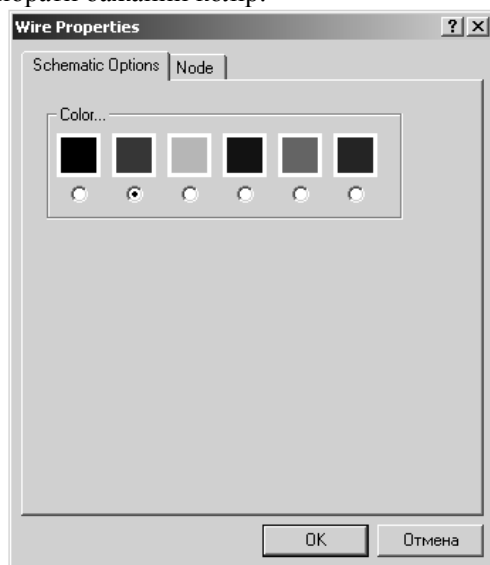


Рис. Д.2.1

Коли схема зібрана, в неї можна вставити додаткові елементи. Для цього потрібно мишею помістити елемент на провідник у потрібному місці, і він автоматично вставиться у схему.

Прилади підключаються до схеми у вигляді їх піктограм. Для цього треба перетягнути прилад з панелі приладів і підімкнути його виводи до відповідних точок схеми таким самим способом, що й з'єднання елементів схеми. Деякі прилади потрібно обов'язково заземлювати — йдеться конкретно про осцилограф, генератор, вимірювач частотних характеристик.

Д.2.3. Установка значень параметрів елементів

Параметри елементів встановлюються у діалоговому вікні, яке відкривається подвійним натисканням лівої кнопки миші на зображенні елемента (рис. Д.2.2).

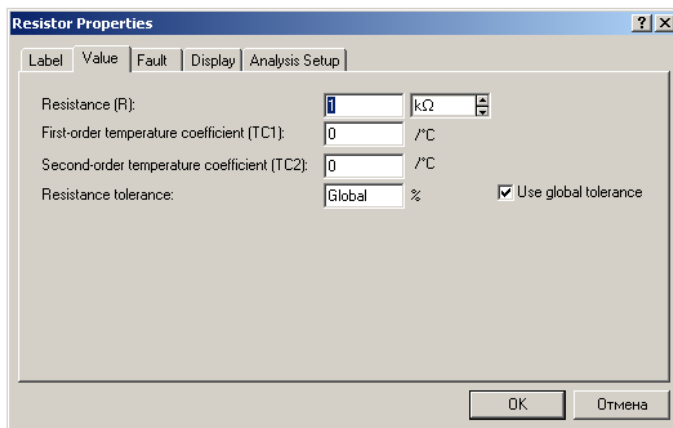


Рис. Д.2.2

У діалоговому вікні за допомогою клавіатури та миші вводяться на закладці Value потрібні значення параметрів і підтверджуються командою ОК. В діалоговому вікні на закладці Label можна присвоїти елементу схемне позначення.

Д.3. Опис програми *ELECTRONICS WORKBENCH*

Вигляд головного вікна програми показано на рис. Д.3.1. Воно містить рядок заголовка, рядок меню, панель інструментів, панель елементів і приладів. На панелі інструментів присутні позначки, що відповідають певним командам меню. У правій верхній частині панелі розташовано вмикач, при натисканні якого починається аналіз схеми. При завершенні аналізу потрібно вимкнути вмикач. Нижче від панелей розташоване робоче поле, на якому формується досліджувана схема разом із вимірювальними приладами. Праворуч і знизу робочого поля розміщено смуги прокрутки.

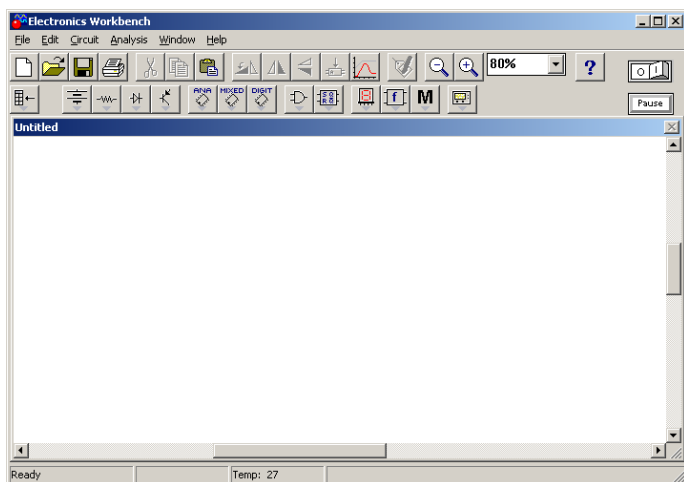


Рис. Д.3.1

Д.3.1. Система меню. Основні команди.

Меню File (див. рис. Д.3.2) використовується для роботи з файлами. Його структура досить стандартна. Тут можна створити новий файл — команда New, відкрити вже існуючий файл — команда Open, зберегти файл на диску — команда Save, записати і зберегти новий файл, вказавши його ім'я — команда Save as. Це основні команди цього меню, які знадобляться для подальшої роботи.

Меню Edit (див. рис. Д.3.3) використовується для редагування схеми. Перед тим, як використовувати команди цього меню, необхідно виділити елемент, що редагується, натиснувши його один раз лівою кнопкою миші. Тоді можна вирізати елемент схеми — команда Cut, скопіювати елемент у буфер обміну — команда Copy, вставити елемент схеми — команда Paste, або виділити всі елементи схеми — команда Select All. Команда Copy as Bitmap дає змогу скопіювати виділену частину схеми на робочому полі в буфер обміну і перенести в будь-який документ. Щоб подивитися вміст буфера обміну, потрібно вибрати команду Show Clipboard.

New	Ctrl+N
Open...	Ctrl+O
Save	Ctrl+S
Save As...	
Revert to Saved...	
Import...	
Export...	
Print...	Ctrl+P
Print Setup...	
Exit	Alt+F4
Install...	
Export to PCB	
Import from SPICE	
Export to SPICE	

Рис. Д.3.2

Cut	Ctrl+X
Copy	Ctrl+C
Paste	Ctrl+V
Delete	Del
Select All	Ctrl+A
Copy as Bitmap	
Show Clipboard	

Рис. Д.3.3

Rotate	Ctrl+R
Flip Horizontal	
Flip Vertical	
Component Properties...	
Create Subcircuit...	Ctrl+B
Zoom In	Ctrl++
Zoom Out	Ctrl+-
Schematic Options...	

Рис. Д.3.4

Меню Circuit (рис. Д.3.4) застосовується для складання схеми з електричних компонентів. За його допомогою можна повернути компонент на 90° — команда Rotate, зробити горизонтально віддзеркалену копію — команда Flip Horizontal, зробити вертикально віддзеркалену копію — команда Flip Vertical. Встановити параметри електричного компонента можна командою Component Properties. Також у цьому меню можна створити підсхему з виділених елементів схеми — команда Create Subcircuit, можна збільшити або зменшити зображення схеми — команди Zoom in та Zoom out. Команда Schematic Options відкриває діалогове вікно (рис. Д.3.5), в якому можна на закладці Show/Hide вибрати елементи, що відображаються на схемі: позначення елементів label, значення параметрів values і моделі елементів models, а також номери вузлів схеми nodes. На закладці Fonts можна вибрати шрифти, їх розмір і колір.

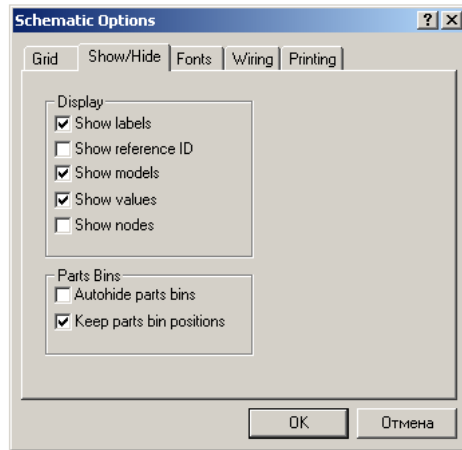


Рис. Д.3.5

Меню Analysis містить команди проведення аналізу складеної схеми. Перші три команди керують процесом моделювання роботи схеми. Це запуск моделювання — команда Activate, зробити паузу — команда Pause та припинити моделювання — команда Stop. Ці команди дублюються вимикачем у правому верхньому куті вікна. За командою DC Operation Point виконується аналіз схеми в режимі постійних струмів. Команда AC Frequency призначена для дослідження амплітудно-частотних і фазочастотних характеристик. При виборі цієї команди відкривається діалогове вікно (рис. Д.3.6), в якому треба задати діапазон частот, тип шкали по обох осях, вихідний вузол схеми Nodes for analysis і виконати команду Simulate, після чого з'явиться вікно результату аналізу (рис. 6.44). У цьому вікні відображаються частотні характеристики, координати точок яких можна визначати, переміщуючи візирні риски і зчитуючи дані в таблиці.

Команда Transient виконує аналіз перехідних процесів.

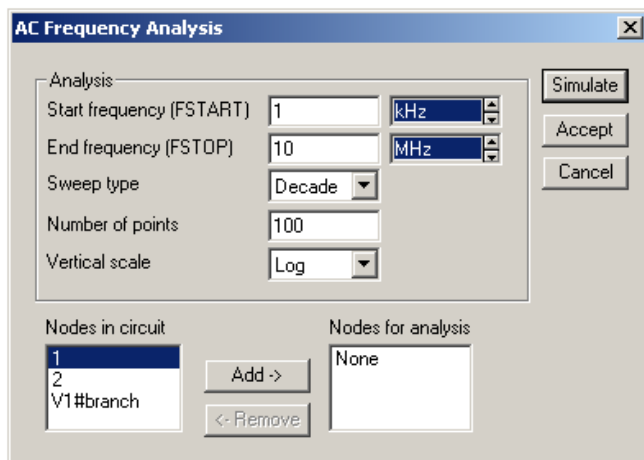


Рис. Д.3.6

Команда **Fourier** відкриває вікно (рис. Д.3.7), в якому можна задати параметри спектрального аналізу сигналів (аналіз Фур'є): вихідний вузол схеми **Output node**, частоту першої гармоніки **Fundamental frequency**, кількість гармонік **Number of harmonics**, вид шкали частот. Спектральний аналіз виконується командою **Simulate**. Результати аналізу відображаються у вікні (див. рис. 6.33).

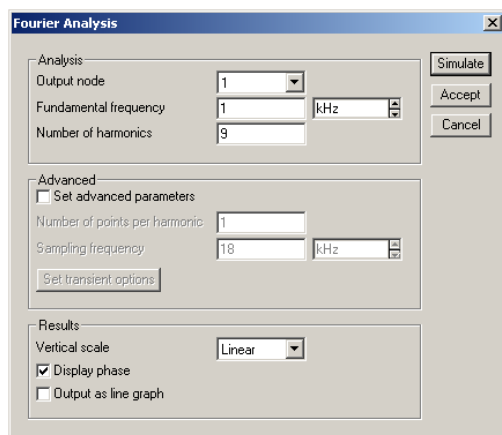


Рис. Д.3.7

Д.3.2. Короткий опис елементної бази EWB 5.12

Спочатку потрібно зазначити, що умовні графічні позначення деяких елементів і компонентів електричних схем у системі EWB 5.12 відрізняються від загальноприйнятих у нашій країні згідно із чинними стандартами, а тому потрібно бути уважними при складанні схем.

Будь-які елементи електричних схем можна вставляти у схему, використовуючи панель елементів головного вікна програми (рис. Д.3.8).



Рис. Д.3.8

Зліва направо кнопки панелі мають таке призначення: 1. Різноманітні джерела напруги, струму чи живлення. 2. Базові компоненти електричних схем. 3. Діоди, діодні мости, світлодіоди, діністори і т. п. 4. Транзистори. 5. Аналогові мікросхеми. 6. Гібридні мікросхеми. 7. Цифрові мікросхеми. 8. Логічні елементи та мікросхеми. 9. Спеціалізовані цифрові мікросхеми. 10. Пристрої індикації. 11. Функціональні елементи. 12. Інші елементи. 13. Прилади аналізу.

Тепер опишемо кожну із груп докладніше. Sources — джерела, рис. Д.3.9:

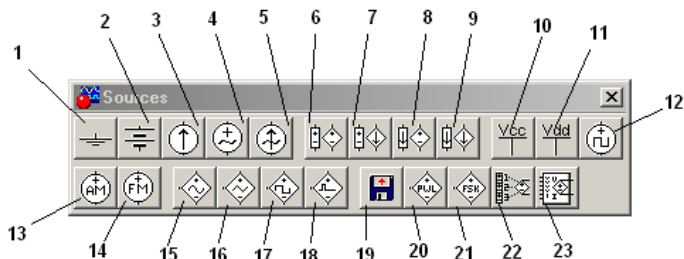


Рис. Д.3.9

1. Ground — заземлення. 2. Battery — джерело живлення 12 В. 3. DC Current Source — джерело постійного струму. 4. AC Voltage Source — джерело змінної напруги. 5. AC Current Source — джерело змінного струму. 6. Voltage-Controlled

Voltage Source — джерело напруги, кероване напругою. 7. Voltage-Controlled Current Source — джерело струму, кероване напругою. 8. Current Controlled Voltage Source — джерело напруги, кероване струмом. 9. Current Controlled Current Source — джерело струму, кероване струмом. 10. Vcc Source — джерело живлення +5 В. 11. Vdd Source — джерело живлення +15 В. 12. Clock — джерело імпульсної напруги 1 000 Гц. 13. AM Source — джерело амплітудно-модульованого сигналу. 14. FM Source — джерело частотно-модульованого сигналу. 15. Voltage-Controlled Sine Wave Oscillator — генератор гармонічного сигналу, керований напругою. 16. Voltage-Controlled Triangle Wave Oscillator — генератор трикутних імпульсів, керований напругою. 17. Voltage-Controlled Square Wave Oscillator — генератор прямокутних імпульсів, керований напругою. 18. Controlled One-Shot — генератор імпульсного струму довільної форми. 19. Piecewise Linear Source — джерело кусково-лінійно апроксимованої напруги (інформація записана у файлі). 20. Voltage-Controlled Piecewise Linear Source — джерело кусково-лінійно апроксимованої напруги, кероване напругою. 21. Frequency-Shift-Keying Source (FSK Source) — частотно-керований генератор. 22. Polynomial Source — поліноміальне кероване джерело напруги.

Basic Parts Bin — базові компоненти (див. рис. Д.3.10): 1. Connector — з'єднання. 2. Resistor — резистор (опір). 3. Capacitor — конденсатор (ємність). 4. Inductor — індуктивність. 5. Transformer — трансформатор. 6. Relay — електромагнітне реле. 7. Switch — перемикач. 8. Time-Delay Switch — перемикач із затримкою. 9. Voltage-Controlled Switch — перемикач, керований напругою. 10. Current-Controlled Switch — перемикач, керований струмом. 11. Pull-up Resistor — опір, підключений до плюса джерела живлення. 12. Potentiometer — потенціометр (змінний опір). 13. Resistor Pack — набір опорів. 14. Voltage-Controlled Analog Switch — аналоговий перемикач, керований напругою. 15. Polarized Capacitor — електролітичний конденсатор. 16. Variable Capacitor — змінний конденсатор. 17. Variable Inductor — змінна індуктивність. 18. Coreless coil — котушка без осердя. 19. Magnetic core — магнітне осердя. 20. Nonlinear Transformer — імпульсний трансформатор.

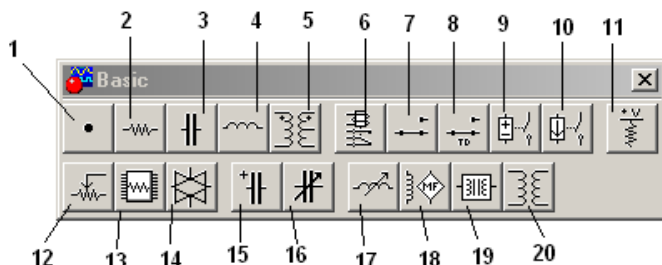


Рис. Д.3.10

Diodes — Діоди (рис. Д.3.11): 1. Diode — діод. 2. Zener Diode — тунельний діод. 3. LED — світлодіод. 4. Full Wave Bridge Rectifier — діодний міст. 5. Shockley Diode — діод Шоклі. 6. Silicon Controlled Rectifier — триністор. 7. Diac — симетричний диністор (діак). 8. Triac — симетричний триністор (тріак).

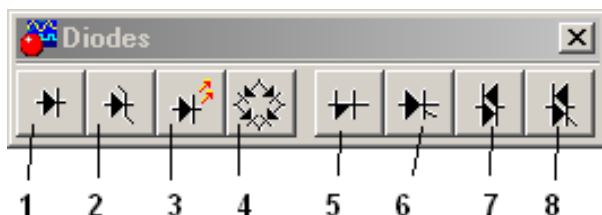


Рис. Д.3.11

Transistors — Транзистори, рис. Д.3.12: 1. NPN Transistor — біполярні $n-p-n$ транзистори. 2. PNP Transistor — біполярні $p-n-p$ -транзистори. 3. N-Channel JFET — польовий транзистор із n -каналом і керованим $p-n$ -переходом. 4. P-Channel JFET — польовий транзистор з p -каналом і з керованим $p-n$ -переходом; МДН-транзистори з вбудованим каналом. 5. 3-Terminal Depletion N-MOSFET. 6. 3-Terminal Depletion P-MOSFET. 7. 4-Terminal Depletion N-MOSFET. 8. 4-Terminal Depletion P-MOSFET; МДН-транзистори з індукованим каналом. 9. 3-Terminal Enhanced N-MOSFET. 10. 3-Terminal Enhanced P-MOSFET. 11. 4-Terminal Enhanced N-MOSFET. 12. 4-Terminal Enhanced P-MOSFET. 13. N-Channel GaAsFET — n -канальний польовий транзистор на основі арсеніду галію. 14. P-Channel GaAsFET — p -канальний польовий транзистор на основі арсеніду галію.

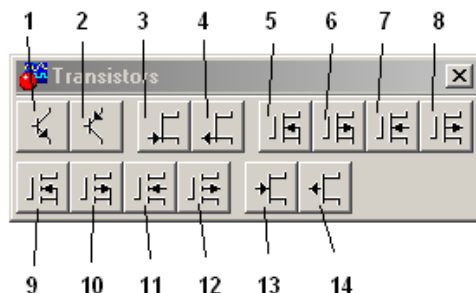


Рис. Д.3.12

Analog ICs — Аналогові мікросхеми (рис. Д.3.13): операційні підсилювачі: 1. 3-Terminal Opamp. 2. 5-Terminal Opamp. 3. 7-Terminal Opamp. 4. 9-Terminal Opamp. 5. Comparator — компаратор. 6. Phase-Locked Loop — фазова автопідстройка частоти (ФАПЧ).

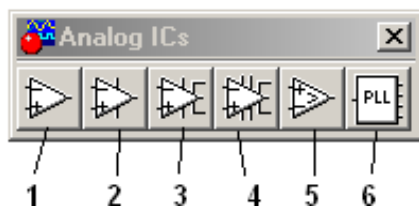


Рис. Д.3.13

Indicators — Пристрої індикації (рис. Д.3.14): 1. Voltmeter — вольтметр. 2. Ammeter — амперметр. 3. Bulb — лампа розжарення. 4. Probe — логічний пробник. 5. 7-Segment Display — семисегментний індикатор. 6. Decoded, 7-Segment Display — семисегментний індикатор із дешифратором. 7. Buzzer — зумер. 8. Bargraph Display — десяти сегментний індикатор. 9. Decoded Bargraph Display — десяти сегментний індикатор із вбудованим АЦП.

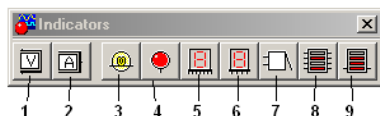


Рис. Д.3.14

Controls — Функціональні елементи (див. рис. Д.3.15): 1. Voltage Differentiator — диференціювання напруги. 2. Voltage Integrator — інтегрування напруги. 3. Voltage Gain Block — підсилювальний чотири-поліусник. 4. Transfer Function Block — передаточний функціональний блок. 5. Multiplier — помножувач. 6. Divider — подільник. 7. Three-Way Voltage Summer — трьох-вхідний суматор напруги. 8. Voltage Limiter — обмежувач напруги. 9. Voltage-Controlled Limiter — обмежувач напруги, керований напругою. 10. Current Limiter Block — обмежувач струму. 11. Voltage Hysteresis — чотириполіусник з петлею гістерезису. 12. Voltage Slew Rate — коло затримки.

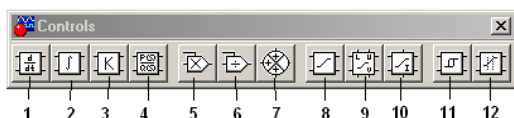


Рис. Д.3.15

Miscellaneous — Інші елементи (рис. Д.3.16): 1. Fuse — вставка плавка. 2. Write Data — запис даних до файла ASCII. 3. Lossy Transmission — лінія передачі з втратами. 4. Lossless Transmission — лінія передачі без втрат. 5. Crystal — кварцовий резонатор. 6. DC Motor — двигун постійного струму. 7. Triode Vacuum — вакуумний триод. 8. Boost Converter — перетворювач постійної напруги (підвищувальний). 9. Buck Converter — перетворювач постійної напруги (понижувальний). 10. Buck-Boost Converter — перетворювач постійної напруги. 11. Text-box — текстовий блок. 12. Title Block — титульна рамка креслення.

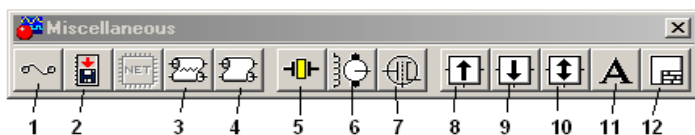


Рис. Д.3.16

Д.4. Вимірювальні прилади програми *ELECTRONICS WORKBENCH*

Д.4.1. Вольтметр, амперметр, мультиметр

На рис. Д.4.1 показано схему з увімкненими вольтметром, амперметром і мультиметром.

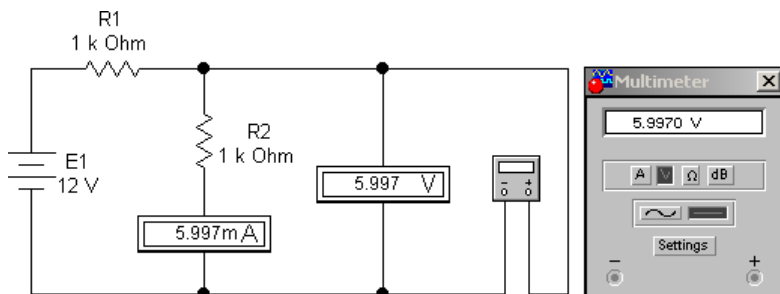


Рис. Д.4.1

На вольтметрі й амперметрі сторона, яка зображена жирною лінією, відповідає клемі «мінус». У діалоговому вікні цих приладів (рис. Д.4.2), можна встановлювати величину внутрішнього опору Resistance і позначення Label, вибирати режим роботи Mode: постійний струм DC або змінний струм AC. У режимі змінного струму ці прилади показують діюче значення.

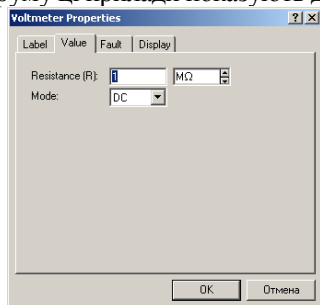


Рис. Д.4.2

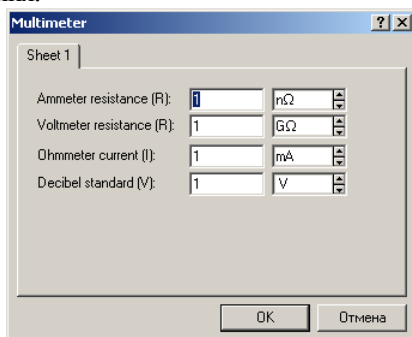


Рис. Д.4.3

Мультиметром можна вимірювати напругу і струм як на постійному, так і на змінному струмі, опір і відношення двох напруг. Щоб отримати розгорнуте зображення мультиметра, а також будь-якого іншого приладу, потрібно двічі

натиснути ліву кнопку миші на схемному зображенні приладу. Межі вимірюваних величин встановлюються автоматично. У діалоговому вікні (див. рис. Д.4.3), яке відкривається кнопкою Settings, можна задавати внутрішні опори вольтметра і амперметра, вимірювальний струм омметра, опорну напругу для вимірювання відношень напруг. Додаткові відомості про мультиметр та інші прилади можна отримати, виділивши прилад і вибравши меню Help, яке викликається також натисканням правої кнопки миші на зображенні приладу.

Д.4.2. Генератор стандартних сигналів і осцилограф

Генератор сигналів і осцилограф показано на рис. Д.4.4. Генератор виробляє коливання напруги синусоїдальної, пилкоподібної і прямокутної форм. Органи керування на панелі генератора дають змогу встановлювати форму коливань, частоту, амплітуду, шпарність пилкоподібних і прямокутних імпульсів Duty cycle, постійну складову напруги Offset.

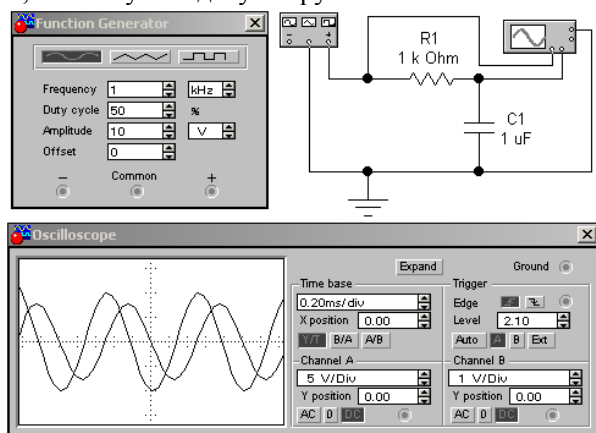


Рис. Д.4.4

Осцилограф має два канали, що дає можливість спостерігати водночас дві осцилограми. По кожному каналу можна встановлювати потрібну чутливість, зміщувати осцилограму вздовж осі V , переключати входи на режими: відкритий DC (вимірювання повної напруги сигналу), закритий AC (вимірювання лише змінної складової напруги сигналу), закорочений нуль. На генераторі розгортки

можна задавати швидкість розгортки Time base, зміщення осцилограми по осі X (X position), переключати режими: V/T — режим розгортки у часі, в якому отримують осцилограми сигналів; режим B/A , в якому зміщення променя по осі U пропорційне сигналу в каналі B, а зміщення по осі X — пропорційне сигналу в каналі A; режим A/B аналогічний попередньому при переміні місцями сигналів каналів.

Для синхронізації розгортки потрібно вибрати, яким сигналом синхронізувати розгортку: сигналом у каналі A, або B, або зовнішнім сигналом Ext. Потім збільшувати рівень синхронізації Level до досягнення синхронізації. Після кожного ввімкнення аналізу зображення, отримане в попередньому аналізі, зникає. Щоб отримати нове зображення, потрібно кнопкою миші натиснути на будь-який вхід осцилографа.

Розгорнуту версію версію осцилографа (рис. Д.4.5) отримують, натиснувши кнопку Expend.

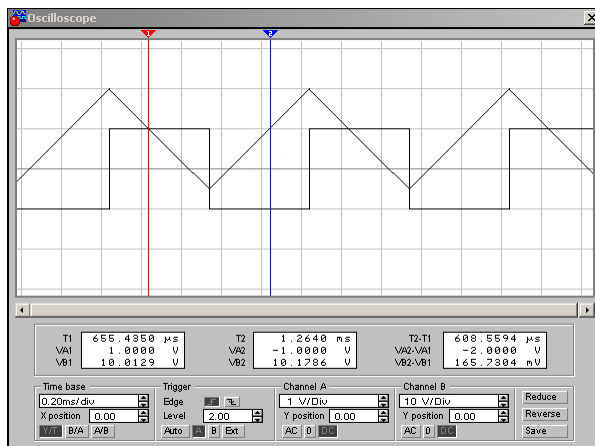


Рис. Д.4.5

Розгорнута версія має ті ж самі органи керування і настроювання, що й звичайна версія. Крім того, вона має на екрані дві вертикальні візирні риски — індикатори, які можна пересувати мишею (лівою кнопкою), установивши показчик миші на трикутник у верхній частині індикатора. Під екраном розташовано три таблиці. На першому відображено момент часу T1, що відповідає положенню першого індикатора на осі часу, а також величини миттєвих напруг сигналів у каналах VA1, VB1 на момент T1. На другому таблиці показано

те ж саме, але для другого індикатора, а саме T2, VA2, VB2. На третьому табло відображено різницю моментів часу T2–T1, а також миттєвих напруг VA2–VA1, VB2–VB1. Інформація на цих табло дає змогу вимірювати параметри досліджуваних сигналів: період і тривалість сигналу, фазові зсуви між сигналами, тривалість фронту і спаду імпульсних сигналів, амплітуди сигналу та інші параметри.

Повернутися до простої версії осцилографа можливо за допомогою кнопки Reduce, натиснувши на ній ліву кнопку миші.

Д.4.3. Вимірювач частотних характеристик

Вимірювачі частотних характеристик (характеріограф) Body Plotter (рис. Д.4.6) застосовують для вимірювання амплітудно-частотних, а також фазочастотних характеристик. Органи управління на передній панелі характеріографа дають змогу задати діапазон частот, в якому потрібно зняти частотні характеристики, діапазон значень частотних характеристик, вид горизонтальної і вертикальної шкал — лінійної або логарифмічної, вид частотної характеристики — амплітудної чи фазової. Зняти частотну характеристику та визначити її параметри можна за допомогою індикаторної риски, яку можна переміщувати лівою кнопкою миші. Координати точки частотної характеристики, яка суміщена з рисою, відображаються на табло в нижній правій частині передньої панелі.

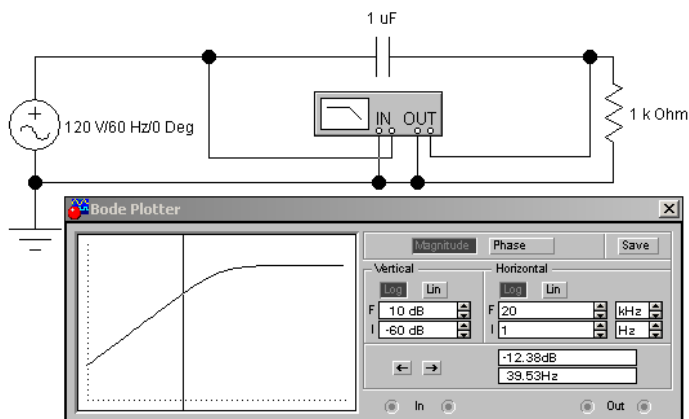


Рис. Д.4.6

Д.5. Завдання і вправи

1. На панелі елементів (див. рис. Д.3.1) відкрити поля «Джерела» і «Базові елементи» (див. рис. Д.3.9, Д.3.10).

2. Перетягти з цих полів на робоче поле наступні елементи (рис. Д.5.1):

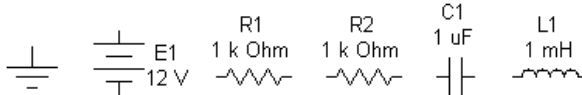


Рис. Д.5.1

3. Перетягти на робоче поле такі прилади: вольтметр, амперметр, мультиметр (рис. Д.5.2). Одержати розгорнуте зображення мультиметра.



Рис.Д .5.2

4. Скласти на робочому полі схему (див. рис. Д.4.1).

5. Перетягти на робоче поле генератор й осцилограф (рис. Д.5.3).

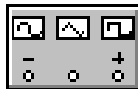


Рис. Д.5.3

6. Скласти на робочому полі схему (рис. Д.4.4).

7. Одержати зображення генератора і осцилографа (рис. Д.5.4). Розгорнути зображення осцилографа (рис. Д.4.5)

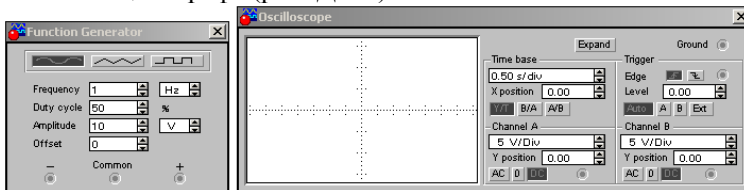


Рис. Д.5.4

8. Активізувати аналіз складених схем (рис. Д.4.1, Д.4.4). Після закінчення аналізу й отримання показань приладів завершити процес аналізу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : экспериментальный учебник для вузов. — М. : Высшая школа, 1983. — 535 с.
2. Белецкий А. Ф. Теория линейных электрических цепей : учебник для вузов. — М. : Радио и связь, 1986. — 544 с.
3. Гумен М. Б., Гуржій А. М., Співак В. М. та ін. Аналіз лінійних електричних кіл : у 3 кн. : підручник. — К. : Вища шк., 2003. — 339 с.
4. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. — 2-е изд., перераб. и доп. — Л.: Энергия, 1972. — 826 с.
5. Каяцкас А. А. Основы радиоэлектроники : учеб. пособие для вузов. — М. : Высшая школа, 1988. — 464 с.
6. Манаев Е. И. Основы радиоэлектроники. — 3-е изд., перераб. И доп. — М. : Радио и связь, 1991. — 512 с.
7. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи : учебник для вузов. — 3-е изд. — М.: Высшая школа, 1990. — 400 с.
8. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи: Учебное пособие для вузов. — М. : Высшая школа, 1977. — 272 с.
9. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники: в 2-х томах : учебник для вузов. Т. 1. — 3-е изд., перераб. и доп. — Л. : Энергоиздат, 1981. — 536 с.
10. Петренко І.А. Основи електротехніки та електроніки: Навч. посіб. Для дистанційного навчання: у 2 ч. — Ч. 1: Основи електротехніки. — К.: Університет «Україна», 2006. — 411 с.
11. Попов В. П. Основы теории цепей : учебник для вузов. — М. : Высшая школа, 1985. — 496 с.
12. Сигорский В. П., Петренко А. И. Основы теории электронных схем : учебное пособие для вузов. — К. : Вища школа, 1971. — 568 с.
13. Сисоев В. М. Основы радіоелектроніки: Підручник. — К.: Вища шк., 2004. — 279 с.: іл.
14. Шашук В. Д. Інженерні розрахунки радіоелектронних кіл. — К. : Політехніка, 2002. — 140 с.
15. Шашук В. Д. Радіоелектронні кола і пристрої : навч. посіб. для вищих навчальних закладів. — К. : Університет «Україна». 2007. — 357 с.
16. Функциональные устройства на микросхемах /Под ред. Найдерова В. З. — М.: Радио и связь, 1985. — 199 с.
17. Основи теорії кіл: навчальний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» / А. В. Булашенко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл 4.73 Мбайт). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 326 с.